

Chapitre 5 : Les bases du transfert de chaleur

Jean-Marie SEYNHAEVE

- 5.1 Les trois modes de transfert de chaleur - Lois
- 5.2 Équation de la conduction
- 5.3 Conditions aux limites
- 5.4 Cas particuliers : plaque plane, paroi cylindrique
- 5.5 Cas d'étude : épaisseur optimum d'isolation
- 5.6 Les échangeurs de chaleur - Illustrations

5.1 Les trois modes de transfert de chaleur - Lois

1. Transfert de chaleur par conduction

⇒ Phénomène à *l'échelle moléculaire* (pas de mouvement macroscopique)

⇒ Solides :

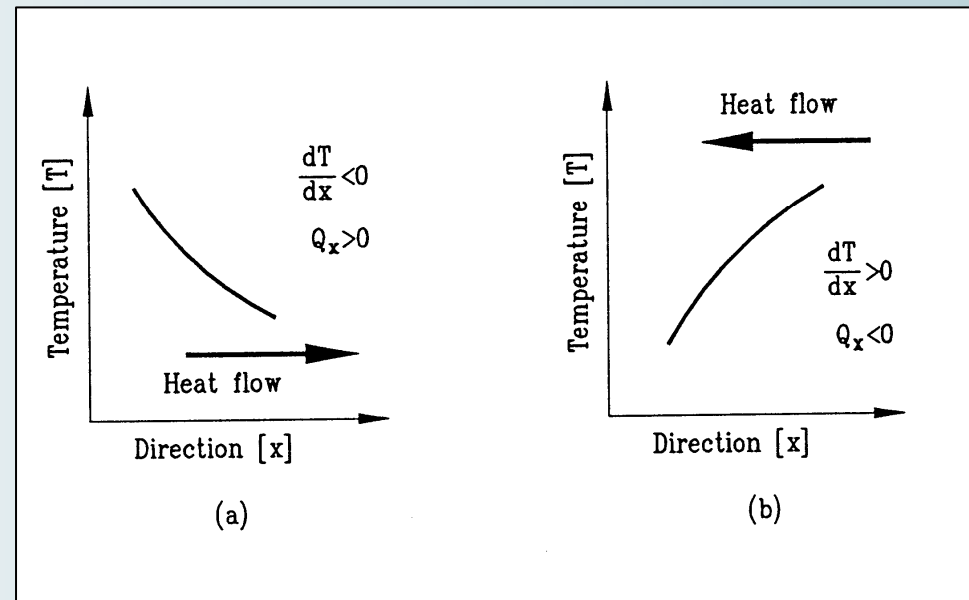
- Transfert d'énergie via les électrons libres (matériaux métalliques)
- Transfert d'énergie (mécanique) de vibration des molécules

⇒ Gaz :

- Mouvement «Brownien»
- transfert d'énergie (mécanique) par chocs intermoléculaires

⇒ Liquide : entre gaz et solide

⇒ *Loi de FOURIER*



$$\vec{\dot{q}} = -k \vec{\nabla} T$$

$\vec{\dot{q}}$

Densité de flux en W/m²

k

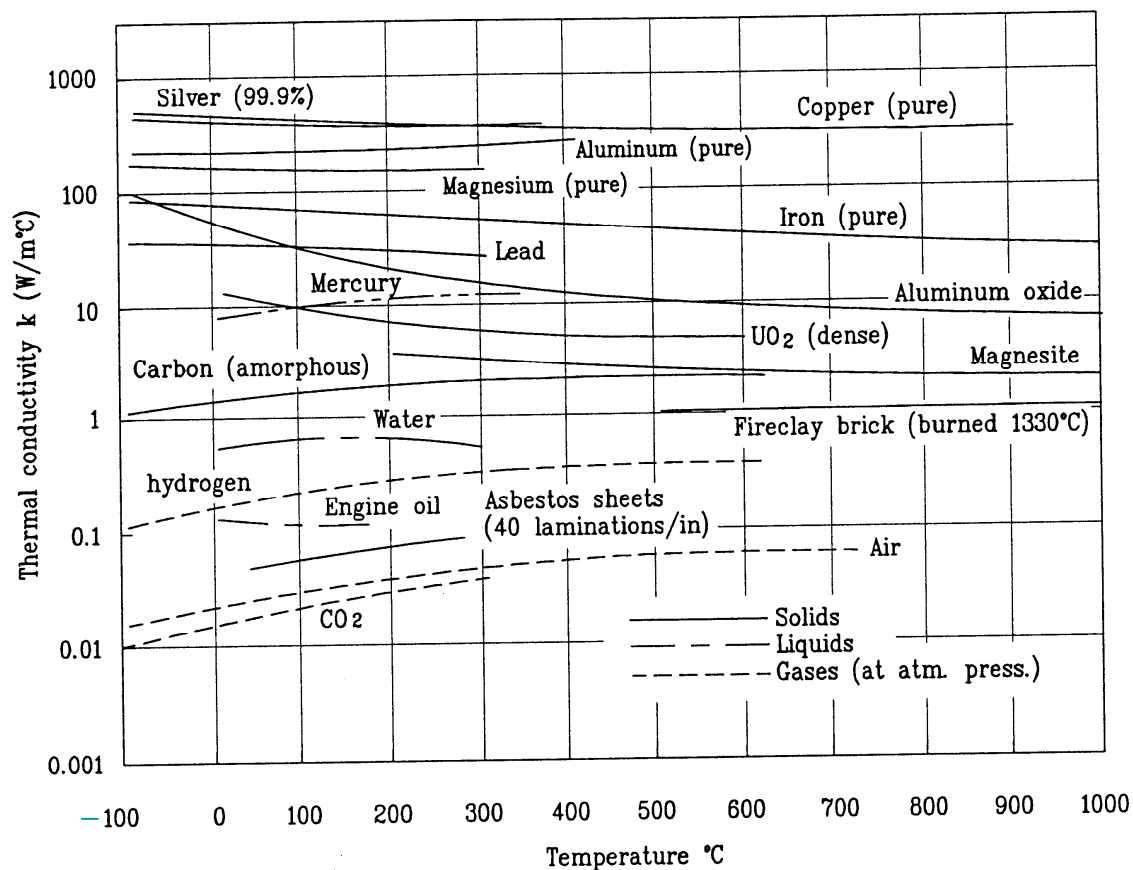
Conductibilité (Conductivité) thermique W/mK

$\vec{\nabla} T$

Gradient de température - Vecteur : $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$



⇒ Valeurs de conductibilité thermique (W/mK)



Métaux purs :

40 ... 450 W/mK

Alliages :

20 ... 200 W/mK

Métaux liquides :

10 ... 100 W/mK

Liquides non métalliques :

0.2 ... 2. W/mK

Solides non métalliques :

0.02 ... 20 W/mK

Isolants :

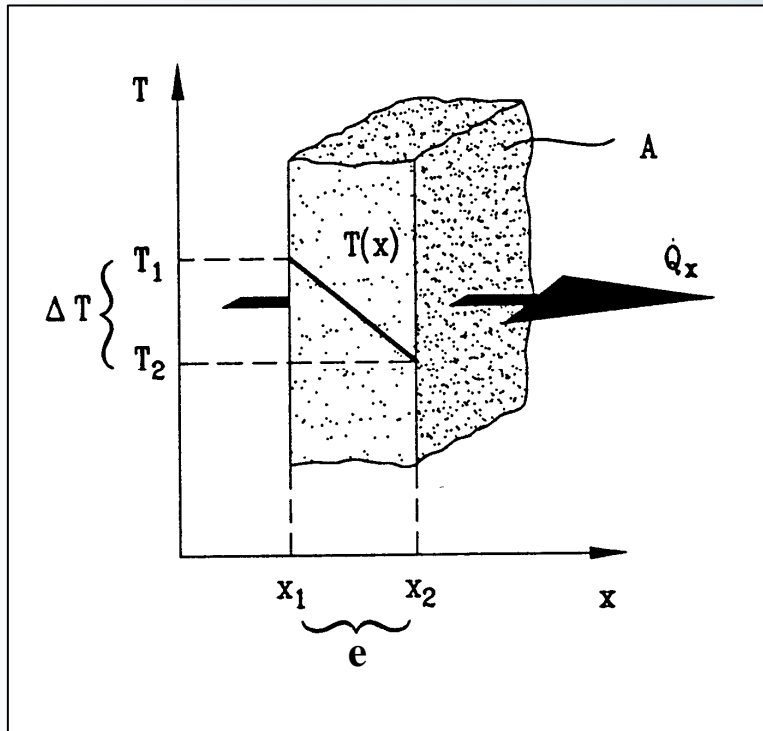
0.02 ... 0.4 W/mK

Gaz :

0.002 ... 0.2 W/mK



⇒ *Exemple simple : conduction 1-D en régime permanent*



⇒ *Régime permanent :*

$$\dot{q}_x = -k \frac{dT}{dx} = \text{Cte}$$

⇒ *Densité de flux thermique (W/m^2) :*

$$\dot{q}_x = -k \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = -k \frac{\Delta T}{e}$$

⇒ *Flux thermique (W) :*

$$\dot{Q}_x = A \dot{q}_x = -Ak \frac{\Delta T}{e}$$



2. Transfert de chaleur par convection

⇒ Phénomène à *l'échelle de « particules »* (mouvement macroscopique)

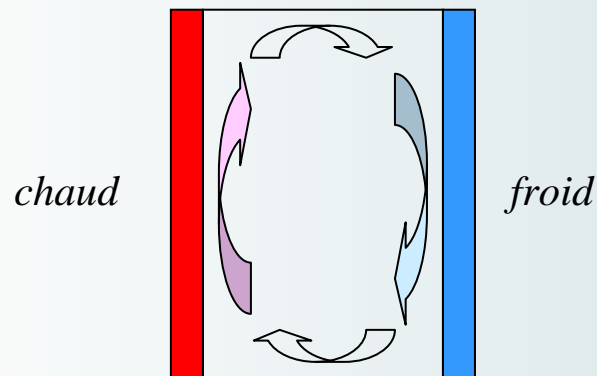
⇒ Entre une surface solide (liquide) et un fluide (liquide ou gazeux) :

⇒ convection naturelle ou forcée : cause du mouvement du fluide

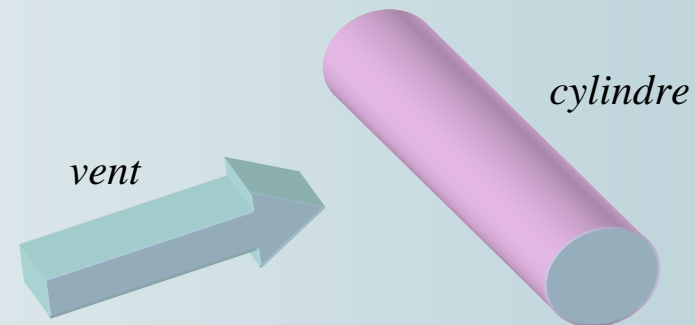
- naturelle : mouvement provoqué par la pesanteur

- forcée : mouvement provoqué par toute autre cause

⇒ Exemples :



Convection naturelle dans un local



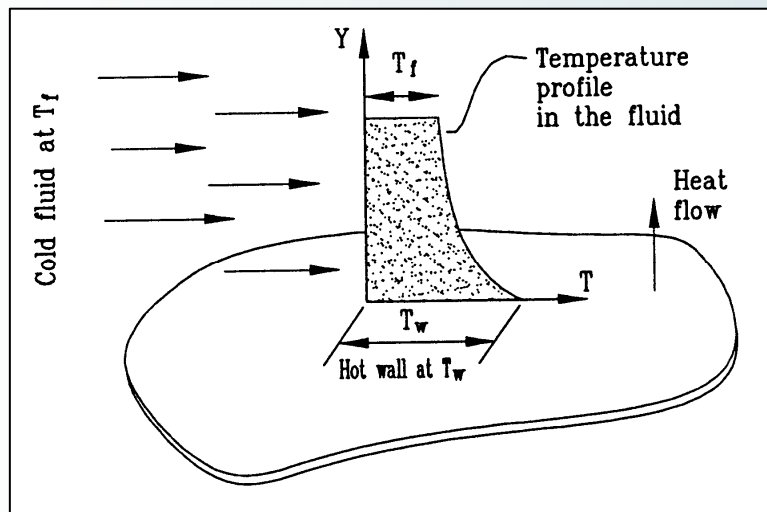
Convection forcée autour d'un obstacle



UCL

Université
catholique
de Louvain

⇒ *Loi de Newton*



$$\dot{Q} = h S \Delta T$$

\dot{Q} Flux thermique en W

h Coefficient de convection en W/m²K

S Surface d'échange en m²

ΔT Différence de températures en K

$$\Delta T \triangleq t_w - t_f$$



⇒ *Ordre de grandeur des coefficients de convection ($\text{W/m}^2 \text{ K}$)*

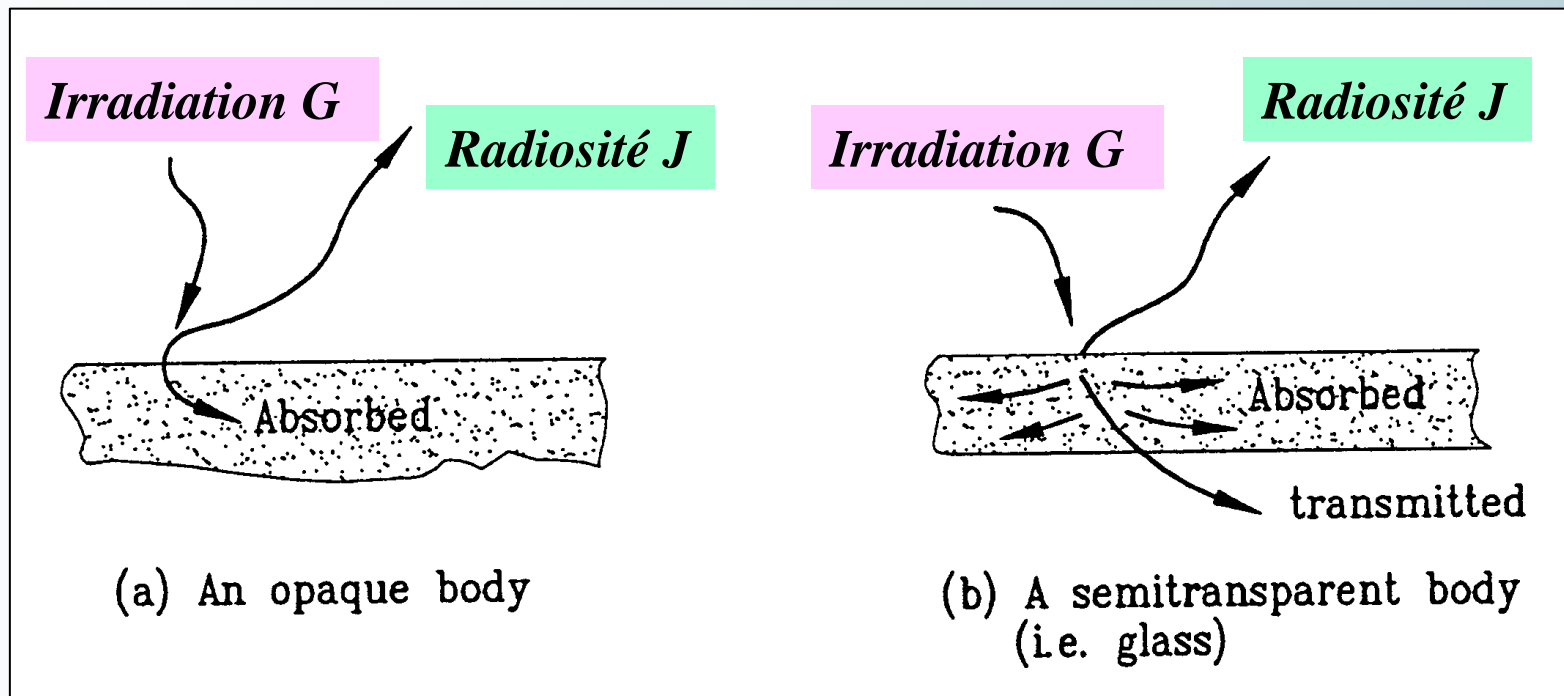
Free convection, $\Delta T = 25^\circ\text{C}$	$h, \text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$
0.25 m-vertical plate in :	
Atmospheric air	5.0
Engine oil	37.0
Water	440.0
0.02 m-OD horizontal cylinder :	
Atmospheric air	8.0
Engine oil	62.0
Water	741.0
0.02 m-diameter sphere in :	
Atmospheric air	9.0
Engine oil	60.0
Water	606.0
Forced convection	
Atmospheric air at 25°C with velocity $v = 10 \text{ m/s}$ over a flat plate of length $L = 0.5 \text{ m}$	17.0
Flow at $v = 5 \text{ m/s}$ across a 1 cm-OD cylinder of :	
Atmospheric air	85.0
Engine oil	1,800.0
Flow of water at 1 kg/s inside 2.5 cm-ID tube	10,500.0

Question :

*Comment évaluer en pratique le
coefficient de convection ?*

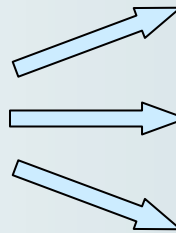
3. Transfert de chaleur par rayonnement

- ⇒ Transfert de chaleur par **phénomène électromagnétique**
- ⇒ Transfert de chaleur **de surface (solide, liquide) à surface**
- ⇒ Le rayonnement est peu absorbé par les gaz



⇒ Définitions - Bilan de flux thermiques

■ Irradiation G (W/m²)



■ Réflectivité : ρG (W/m²)

■ Absorptivité : αG (W/m²)

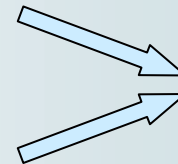
■ Transmittivité : τG (W/m²)

Bilan

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

■ Réflectivité : ρG (W/m²)

■ Pouvoir émissif : E (W/m²)



■ Radiosité J (W/m²)

Bilan

$$J = E + \rho G$$

⇒ *Loi de Stefan-Boltzmann*

- Pouvoir émissif d'un corps noir : $E_{c.n.}$ (W/m²)

$$E_{c.n.} = \sigma T^4 \quad \text{avec } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$$

- Émissivité d'une surface :

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_{c.n.}(T)} \leq 1$$

⇒

$$J = \varepsilon E_{c.n.} + \rho G$$

⇒ *Loi de Kirchhoff*

- 1^{ère} loi :

$$\frac{E_i(T_j)}{\alpha_i(T_j)} = \text{constante.}$$

- 2^{ème} loi :

$$G_i(T) = E_{c.n.}(T)$$

- 3^{ème} loi :

$$\alpha_i(T) = \frac{E_i(T)}{G_i(T)} = \frac{E_i(T)}{E_{c.n.}(T)} = \varepsilon_i(T)$$

5.2 Équation de la conduction

• Hypothèses :

⇒ *Vitesse = 0 : solide*

⇒ *Conductibilité thermique k = Constante*

• Équation générale de la conduction :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T = \rho \dot{q}_r \quad \text{ou} \quad \nabla^2 T + \frac{P}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

⇒ T : température fonction du temps et de la position dans l'espace ($^{\circ}\text{C}$)

⇒ P : génération de puissance thermique (W/m^3)

⇒ a : diffusivité thermique (m^2/s)

$$a \triangleq \frac{k}{\rho c}$$

∇^2 Laplacien

• Cas particuliers :

⇒ $P = 0$: Équation de la diffusion

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

⇒ Régime permanent : Équation de Poisson

$$\nabla^2 T + \frac{P}{k} = 0$$

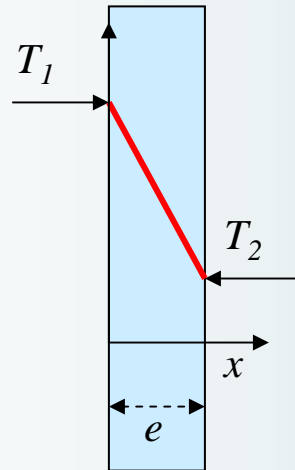
⇒ Régime permanent et $P = 0$: Équation de Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

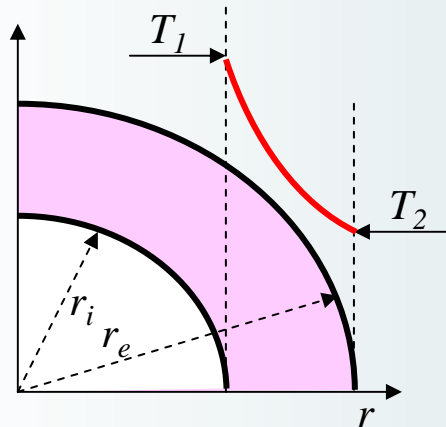
→ *Coordonnées rectangulaires* $\nabla^2 T \triangleq \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

→ *Coordonnées cylindriques* $\nabla^2 T \triangleq \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

• Exemples : Équation de Laplace en 1-D



Plaque plane



Paroi cylindrique

• Équation de Laplace :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T = c_1 x + c_2$$

• Conditions aux limites :

$$T(0) = T_1 \text{ et } T(e) = T_2$$

• Température :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1$$

• Densité de flux (W/m²) :

$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dx} = k \frac{T_1 - T_2}{e} = Cte$$

• Équation de Laplace : $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow T = c_1 \ln r + c_2$

• Conditions aux limites : $T(r_i) = T_1 \text{ et } T(r_e) = T_2$

• Température :

$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_e/r_i)}$$

• Densité de flux (W/m²) :

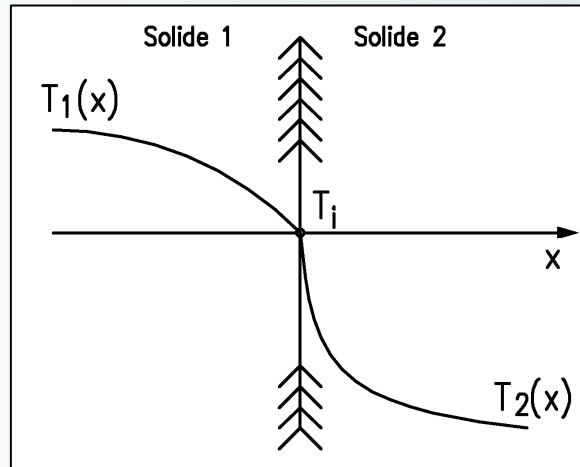
$$\dot{q} = -k \frac{dT}{dr} = -\frac{k(T_2 - T_1)}{r \ln(r_i/r_e)} \neq Cte$$

• Flux par mètre (W/m) :

$$\dot{Q} = A \dot{q} = -\frac{2\pi k(T_2 - T_1)}{\ln(r_i/r_e)} = Cte$$

5.3 Conditions aux limites

• Interface solide-solide (contact parfait)



- Même température

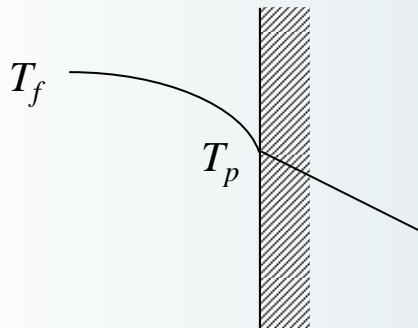
$$T_i = T_{i,1} = T_{i,2}$$

- Même flux thermique à l'interface

$$\dot{q}_i = \dot{q}_{i,1} = \dot{q}_{i,2} \Rightarrow k_1 \left. \frac{dT_1}{dx} \right|_i = k_2 \left. \frac{dT_2}{dx} \right|_i$$

• Interface fluide-solide (sans rayonnement)

- Même température : T_p
- Même flux thermique à la paroi



$$\dot{q}_i = \dot{q}_{i,conv} = \dot{q}_{i,cond}$$

 \Rightarrow

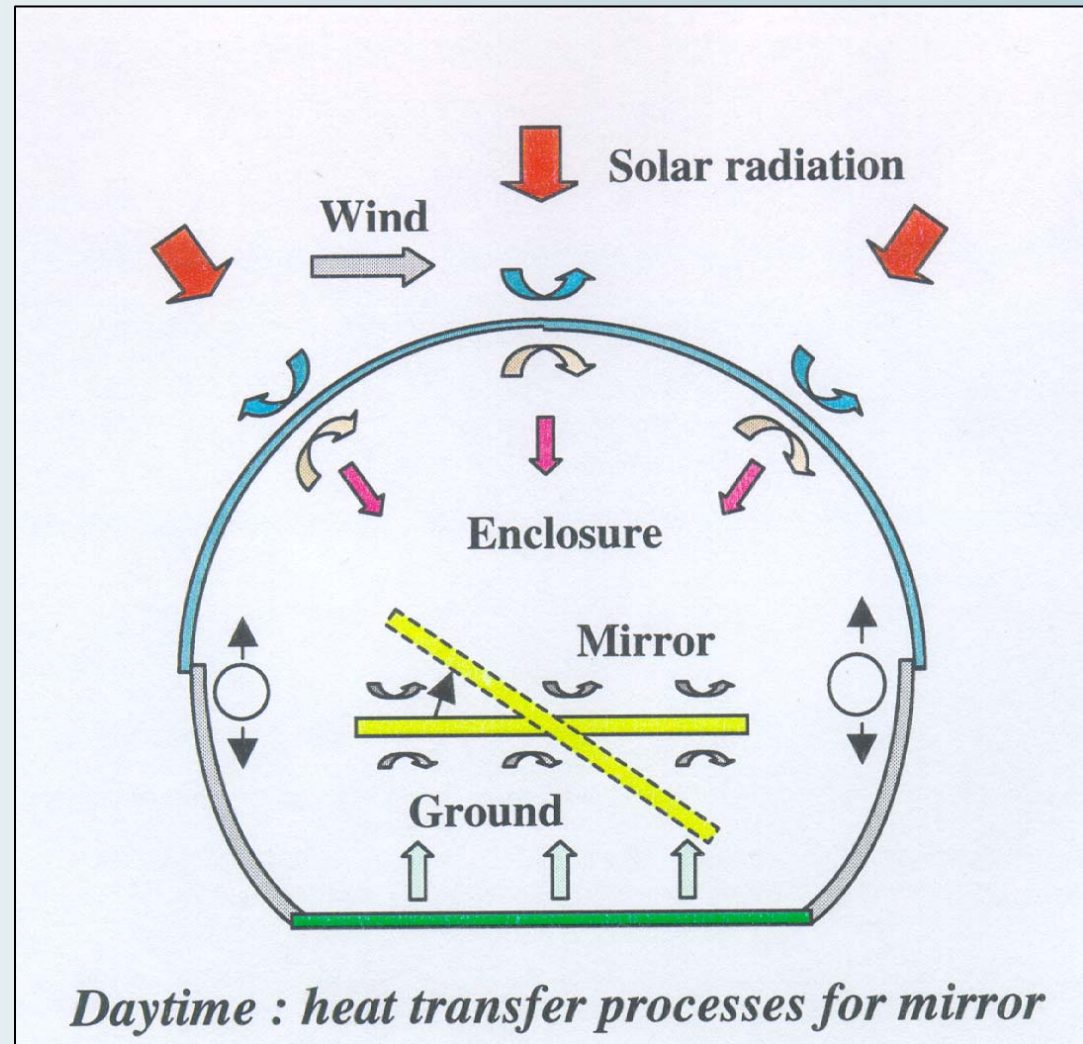
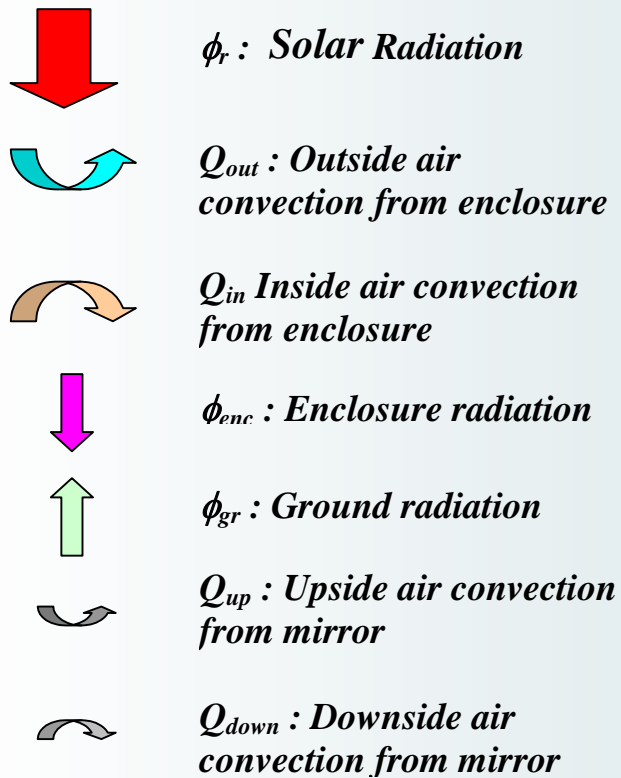
$$\dot{q}_{i,cond} = k \left. \frac{dT}{dx} \right|_i$$

 \Rightarrow

$$\dot{q}_{i,conv} = h(T_p - T_f)$$

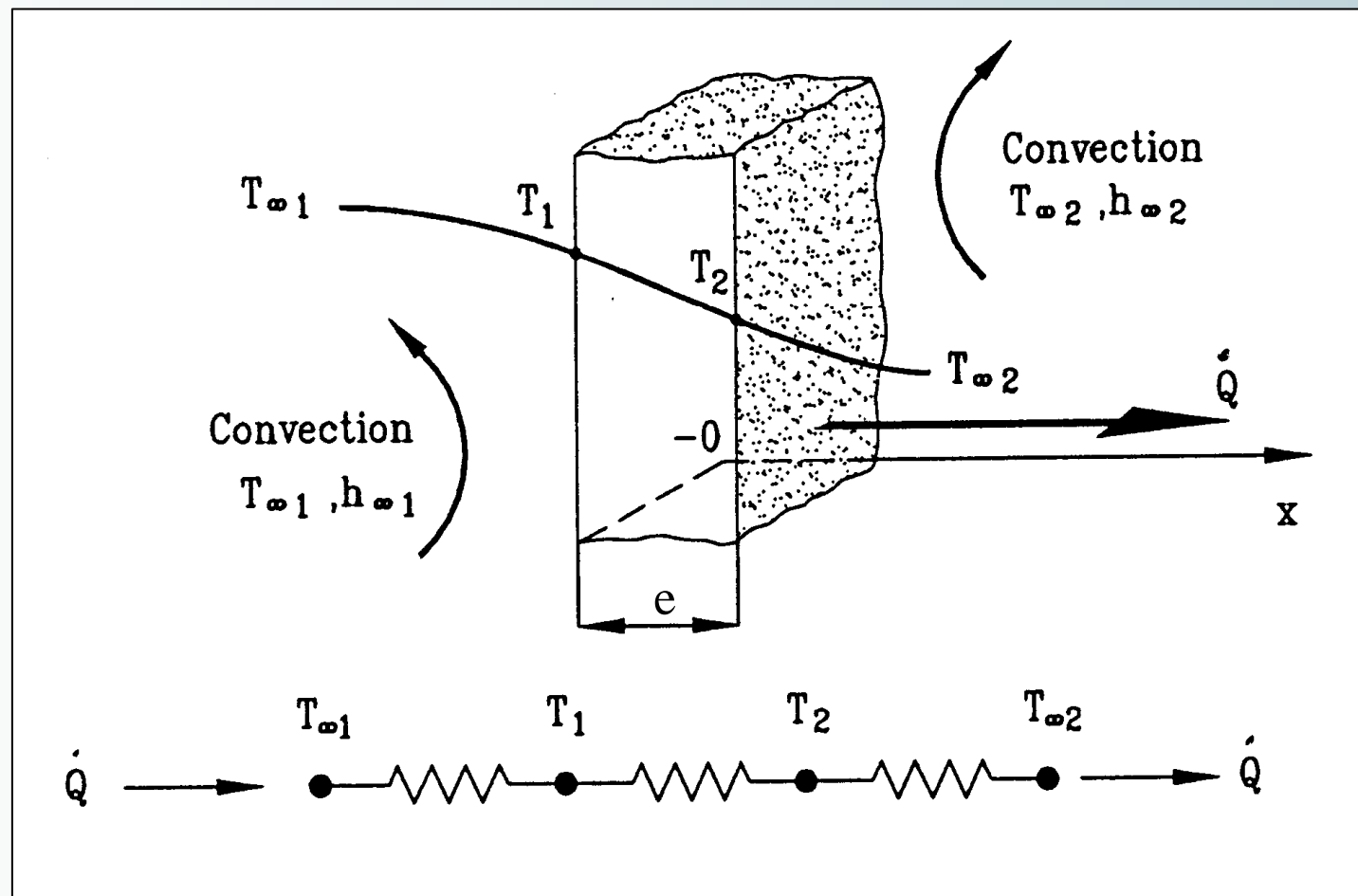


• Exemple de conditions aux limites



5.4 Cas particuliers : plaque plane, paroi cylindrique, ailette

• Plaque plane





- Hypothèses :

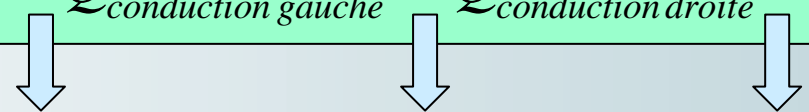
⇒ Régime permanent

⇒ Pas de flux de rayonnement

⇒ Pas de génération de chaleur

- Conditions aux limites (flux thermiques) :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{convection gauche}} = \dot{Q}_{\text{conduction gauche}} = \dot{Q}_{\text{conduction droite}} = \dot{Q}_{\text{convection droite}}$$



- Solution :

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{\frac{1}{Ah_{\infty 1}}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{Ak}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\frac{1}{Ah_{\infty 2}}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{Ah_{\infty 1}} + \frac{e}{Ak} + \frac{1}{Ah_{\infty 2}}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{1(AU)}$$

- Coefficient de transfert global AU :

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = \frac{1}{Ah_{\infty 1}} + \frac{e}{Ak} + \frac{1}{Ah_{\infty 2}}$$

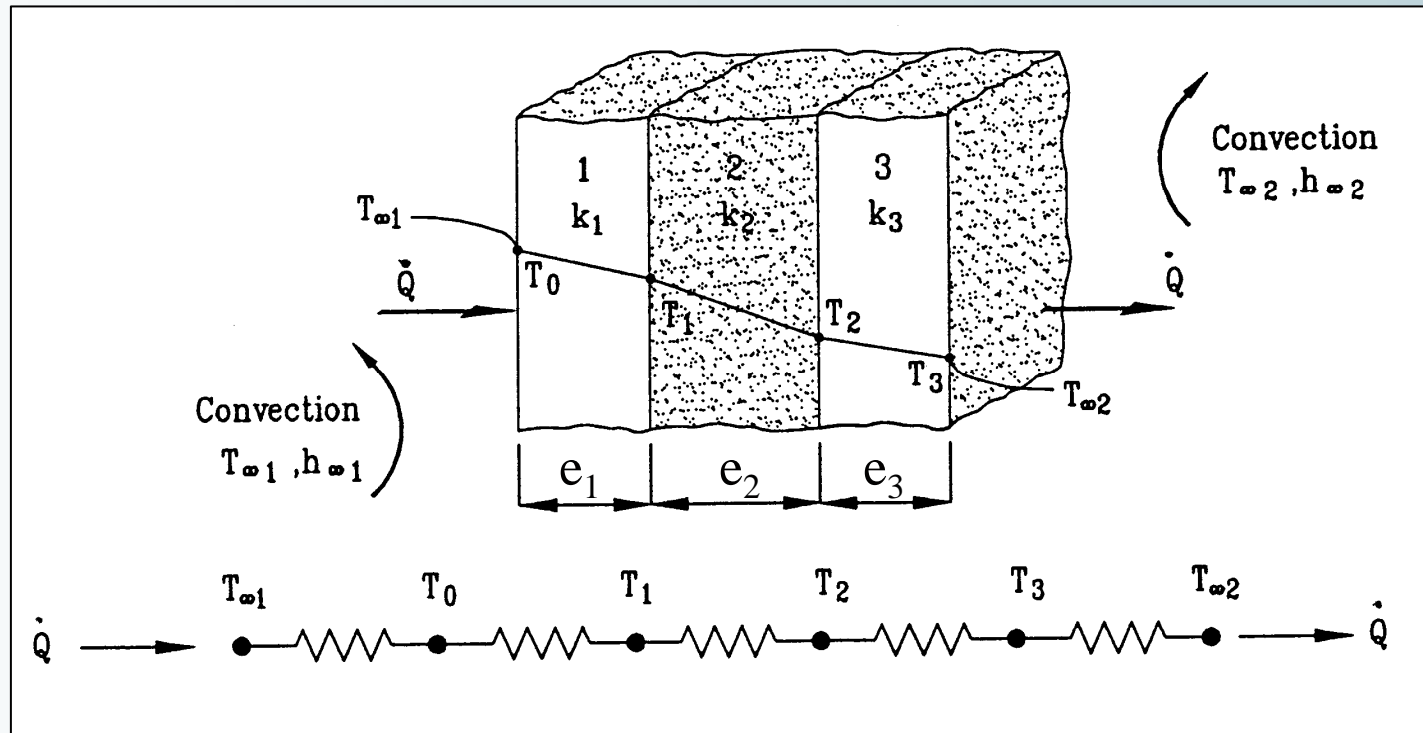
- Notion de résistance thermique :

$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = \Delta T = R_{th} \dot{Q} \quad \longleftrightarrow \quad U = RI$$

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = R_{\text{conv, gauche}} + R_{\text{cond}} + R_{\text{conv, droite}}$$



- Plaque plane composée :



$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = R_{th} \dot{Q}$$

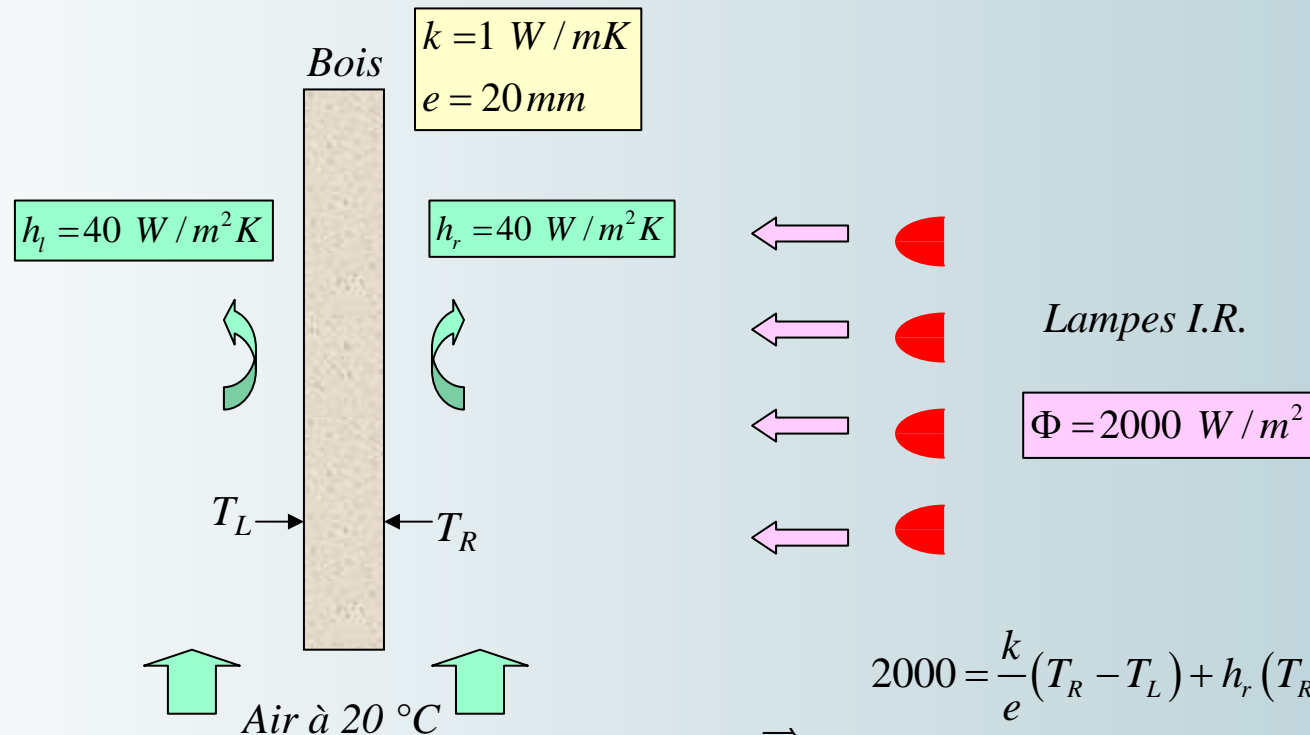
$$\dot{Q} \text{ en } W$$

Avec

$$R_{th} = \frac{1}{Ah_{\infty 1}} + \frac{e_1}{Ak_1} + \dots + \frac{e_n}{Ak_n} + \frac{1}{Ah_{\infty 2}}$$



• Exemple plaque plane : séchage de bois aggloméré



$$2000 = \frac{k}{e}(T_R - T_L) + h_r(T_R - 20)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{e}(T_R - T_L) = h_l(T_L - 20)$$

• Conditions aux limites en régime permanent :

1. En S_R : $\Phi = \dot{q}_{cond} + \dot{q}_{conv,r}$

2. En S_L : $\dot{q}_{cond} = \dot{q}_{conv,l}$

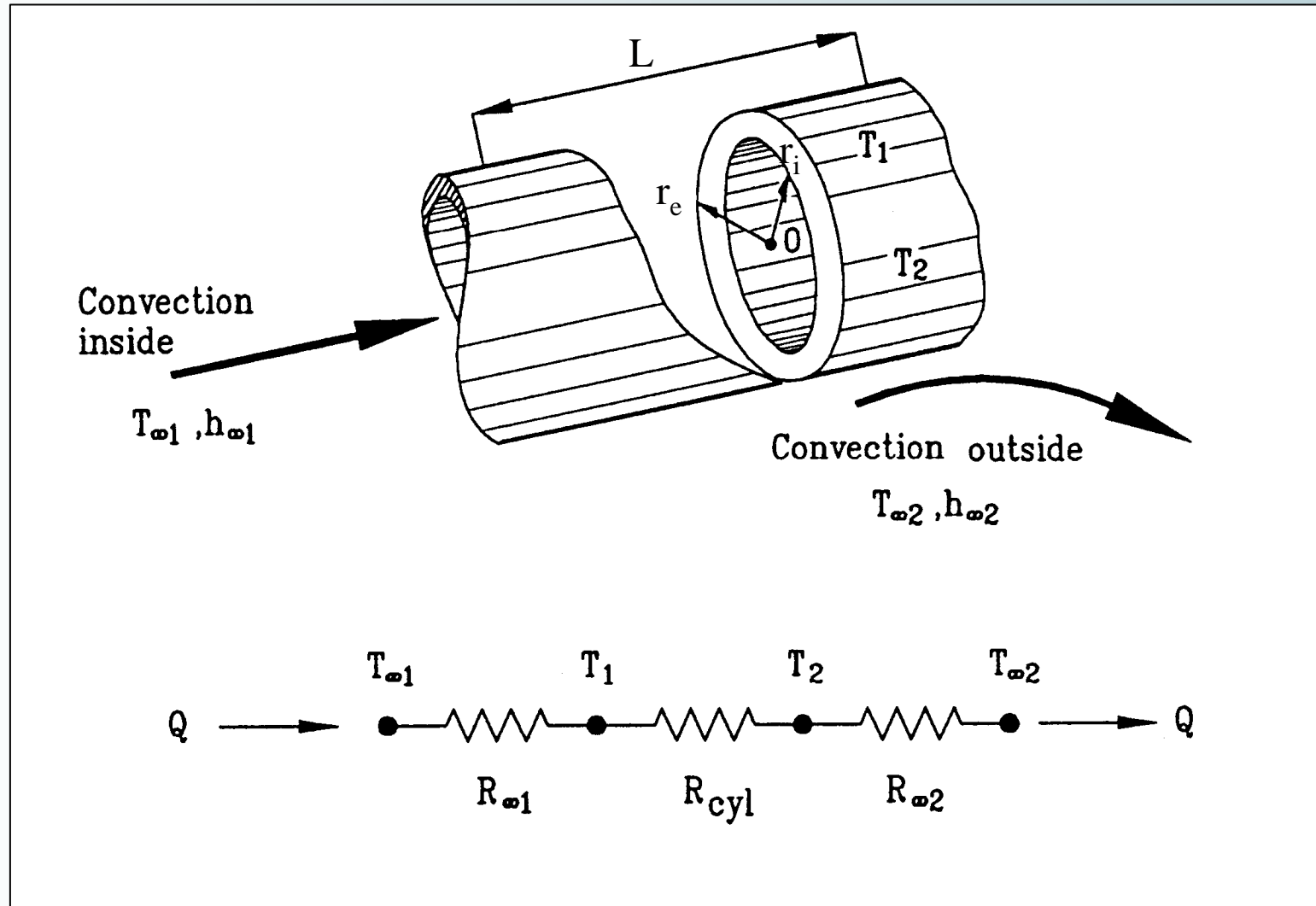
• Solution : $T_L = 37.9 \text{ °C}$ et $T_R = 52.1 \text{ °C}$

• Si $h_r \rightarrow 0$:

$T_L = 70 \text{ °C}$ et $T_R = 110 \text{ °C}$



- Paroi cylindrique





- Hypothèses :

⇒ Régime permanent

⇒ Pas de flux de rayonnement

⇒ Pas de génération de chaleur

- Conditions aux limites (flux thermiques) :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{convection int.}} = \dot{Q}_{\text{conduction int.}} = \dot{Q}_{\text{conduction ext.}} = \dot{Q}_{\text{convection ext.}}$$

↓
↓
↓

Surface intérieure *Régime permanent* *Surface extérieure*

- Solution :

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{\frac{1}{2\pi r_i L h_{\infty 1}}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L k}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\frac{1}{2\pi r_e L h_{\infty 2}}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{2\pi r_i L h_{\infty 1}} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L k} + \frac{1}{2\pi r_e L h_{\infty 2}}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{(AU)}$$

- Coefficient de transfert global AU :

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = \frac{1}{2\pi r_i L h_{\infty 1}} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L k} + \frac{1}{2\pi r_e L h_{\infty 2}}$$

Remarque : $r_e/r_i \rightarrow 1$?

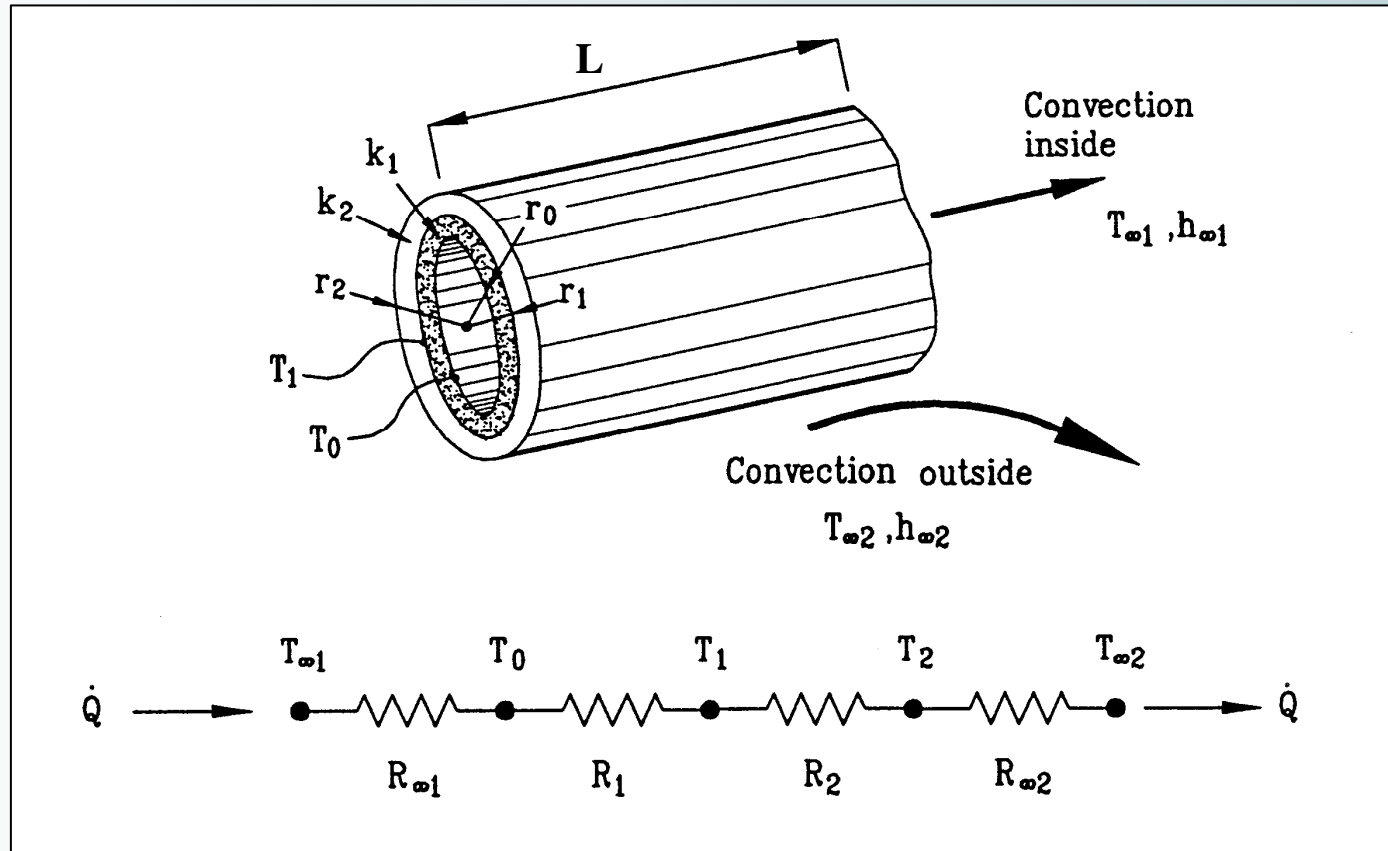
- Notion de résistance thermique :

$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = \Delta T = R_{th} \dot{Q}_l \quad \longleftrightarrow \quad U = RI$$

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = R_{\text{conv, int.}} + R_{\text{cond}} + R_{\text{conv, ext.}}$$



- Paroi cylindrique composée :



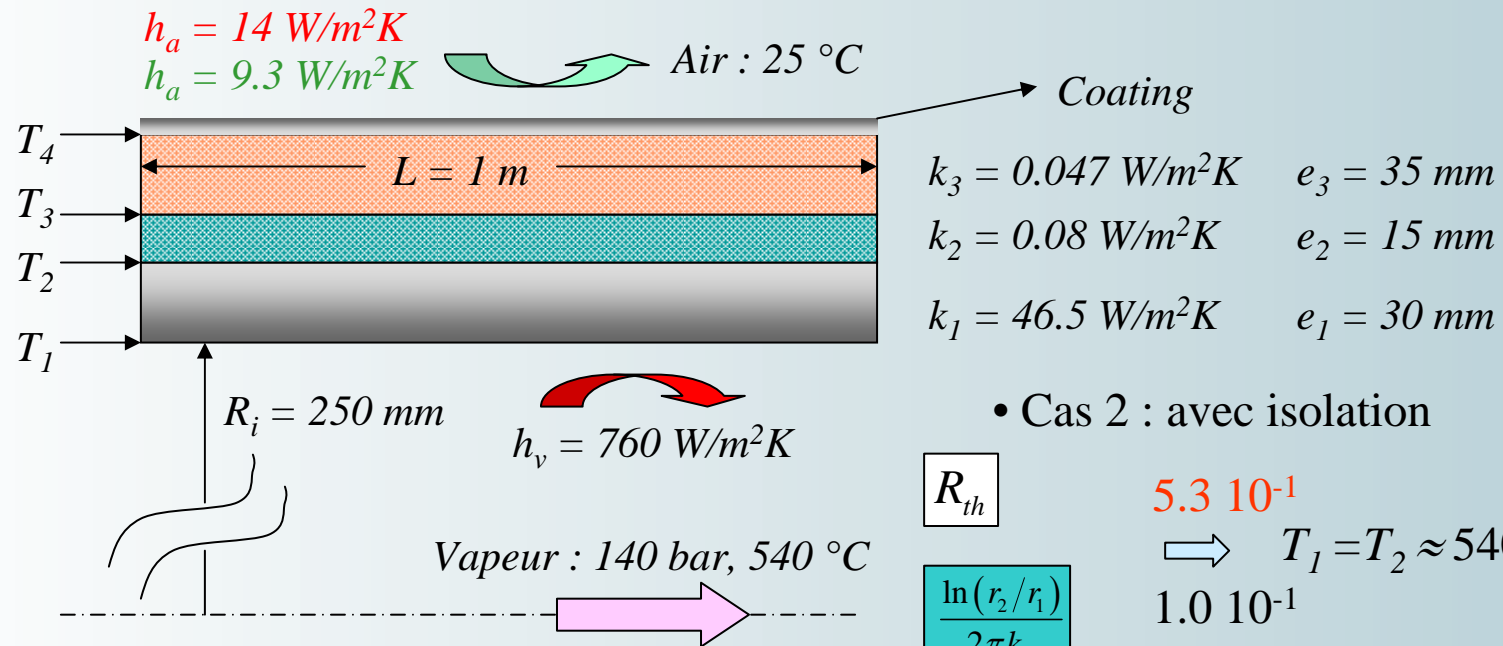
$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = \Delta T = R_{th} \dot{Q}_l$$

$$\dot{Q} \text{ en } W$$

Avec

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = \frac{1}{2\pi r_0 L h_{\infty 1}} + \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi L k_1} + \dots + \frac{\ln(r_n/r_{n-1})}{2\pi L k_n} + \frac{1}{2\pi r_n L h_{\infty 2}}$$

• Exemple paroi cylindrique : transport de vapeur



• Cas 1 : sans isolation

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi r_0 h_v} + \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi k_1} + \frac{1}{2\pi r_1 h_a} \quad K/W$$

$4.1 \cdot 10^{-2}$ $8.4 \cdot 10^{-4}$ $3.9 \cdot 10^{-4}$ $4.1 \cdot 10^{-2}$

$T_1 = 530 \text{ °C}$ $T_2 = 525 \text{ °C}$

$\dot{Q}_{s,i} = 12.6 \text{ kW}$

• Cas 2 : avec isolation

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi r_0 h_v} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_2} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_3} + \frac{1}{2\pi r_3 h_a}$$

$5.3 \cdot 10^{-1}$
 $\Rightarrow T_1 = T_2 \approx 540 \text{ °C}$
 $1.0 \cdot 10^{-1}$
 $\Rightarrow T_3 = 434 \text{ °C}$
 $3.8 \cdot 10^{-1}$
 $\Rightarrow T_4 = 75 \text{ °C}$
 $0.5 \cdot 10^{-2}$

$\dot{Q}_{a,i} = 0.97 \text{ kW}$

• Efficacité d'isolation

$$\eta_{isolation} = \frac{\dot{Q}_{s,i} - \dot{Q}_{a,i}}{\dot{Q}_{s,i}} = 0.92$$

Ailette mince : Illustration calcul CFD (Fluent)

Surchauffeur de chaudière de récupération

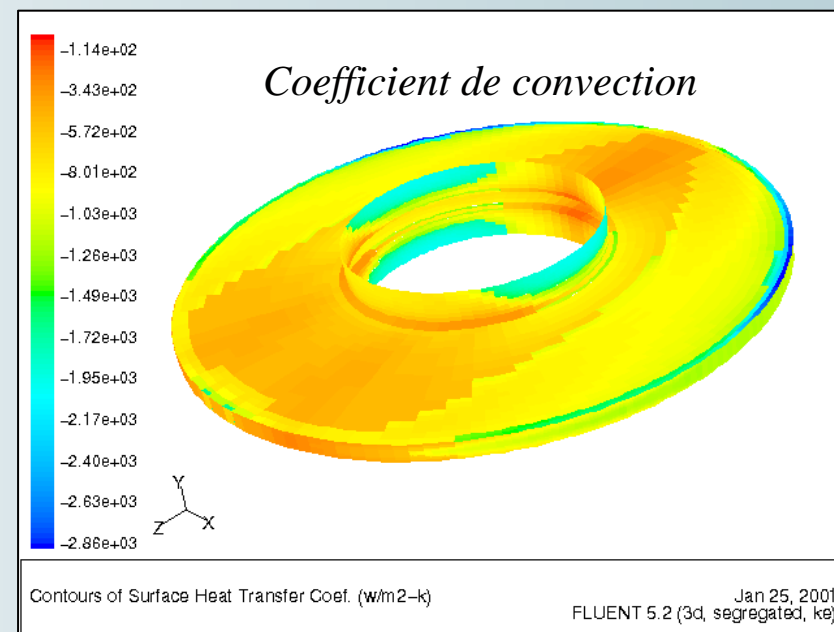
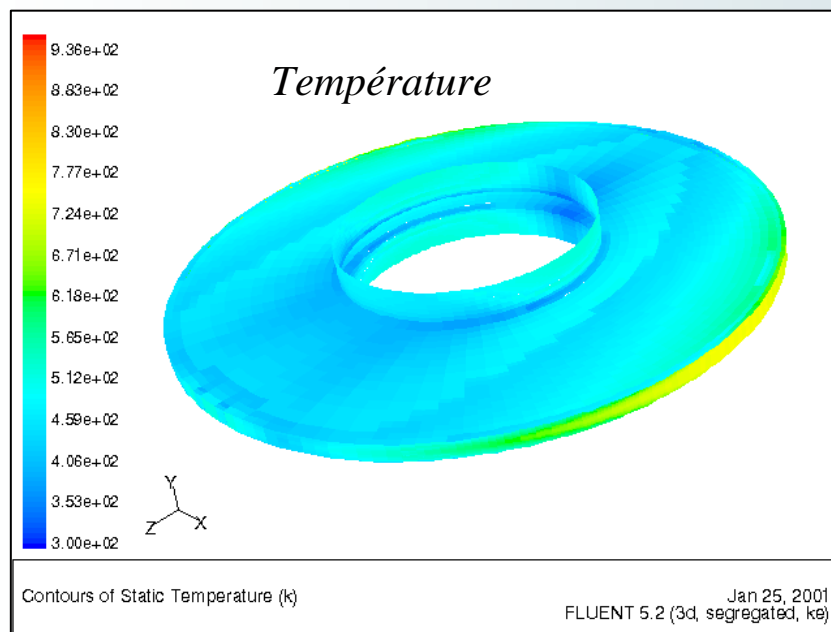
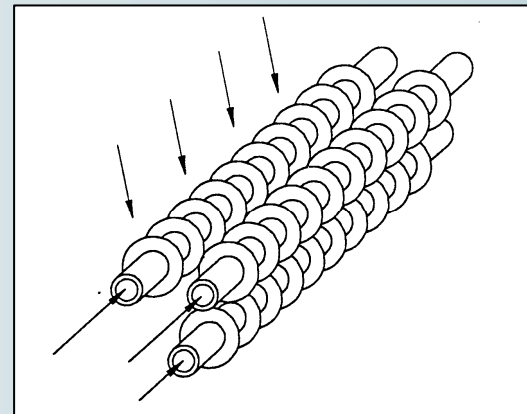
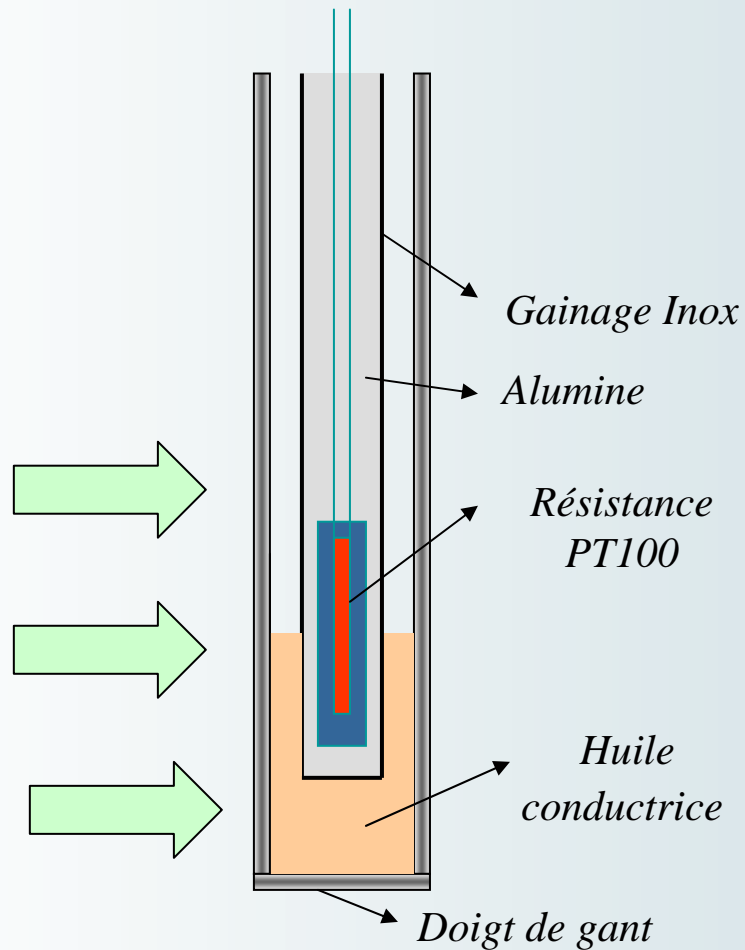


Illustration : conduction en transitoire - COND-2D

Réponse en transitoire d'une sonde PT100



⇒ Équation générale de la conduction

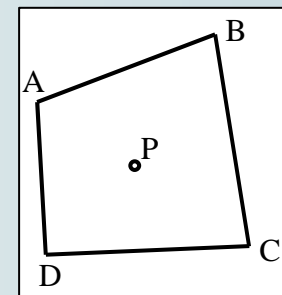
$$\nabla^2 T + \frac{P}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

⇒ Discrétisation spatiale

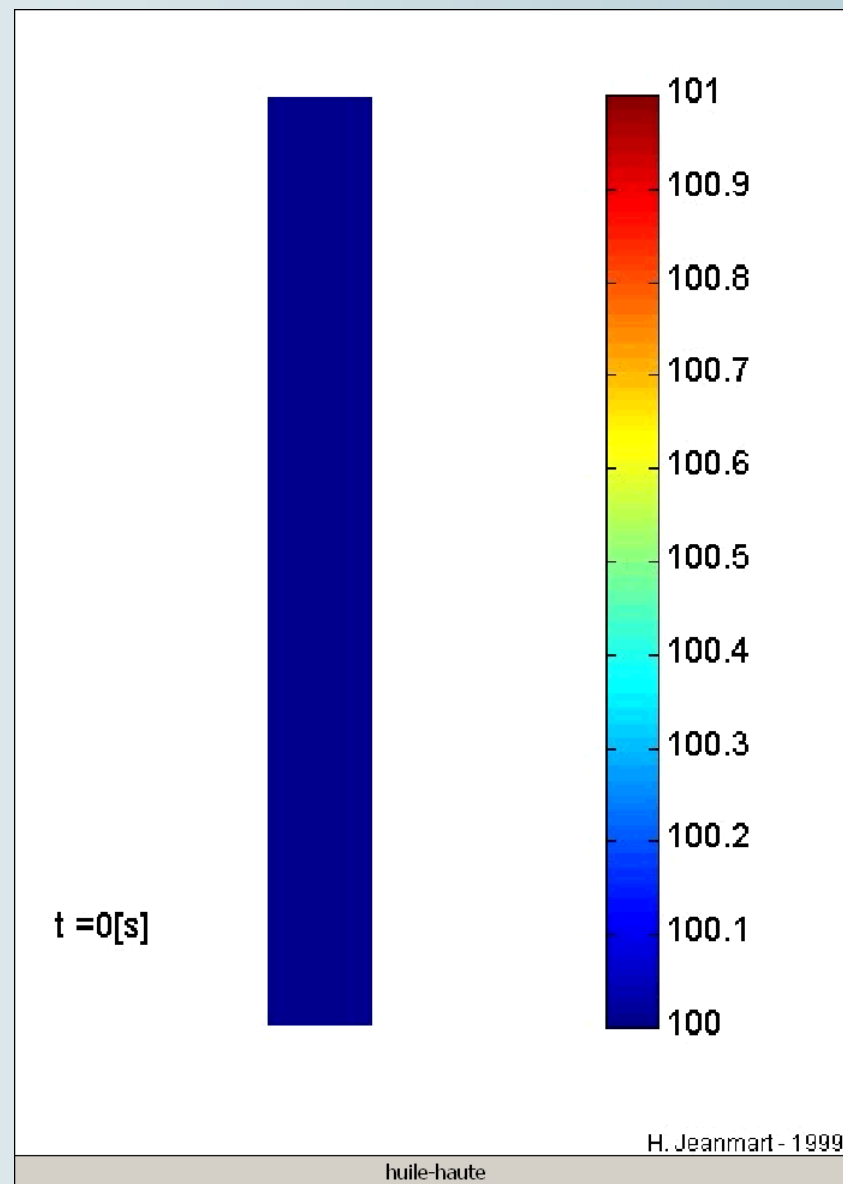
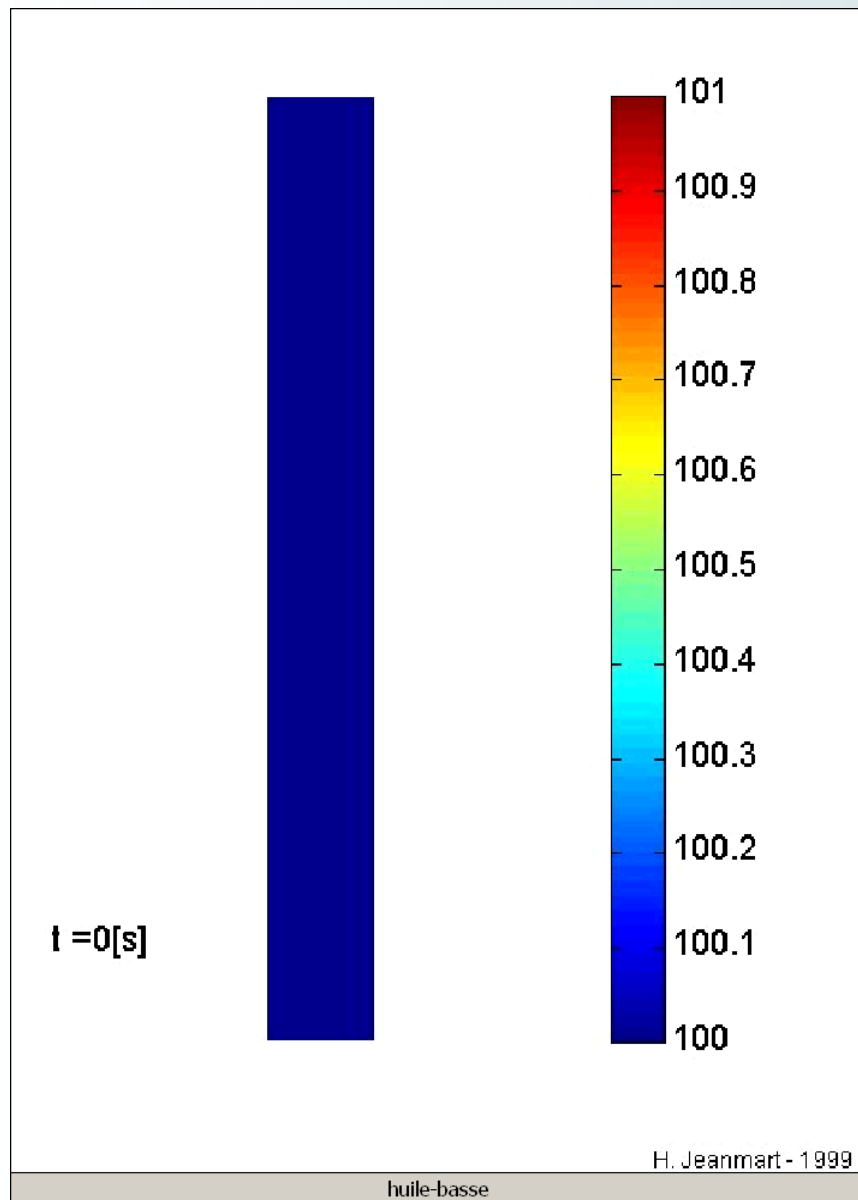
- Différences finies

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = P + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

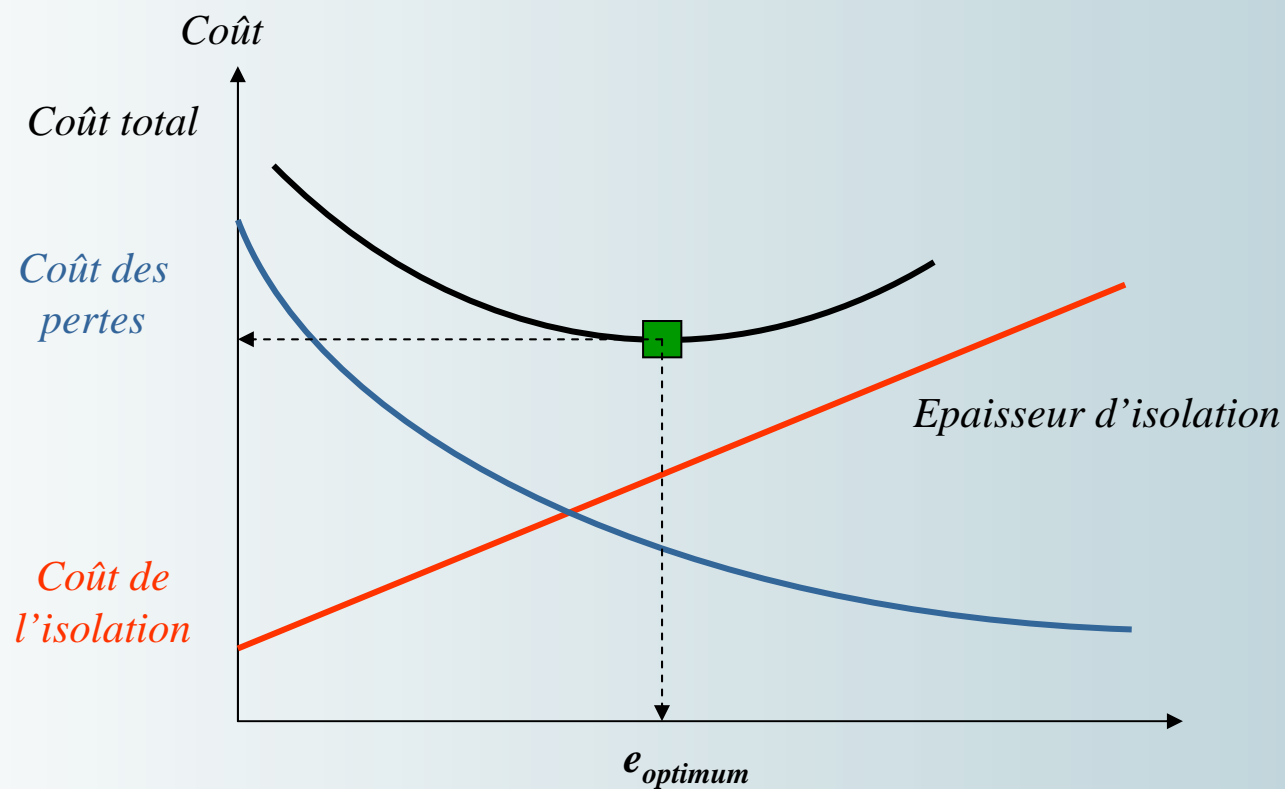
- Volumes finis



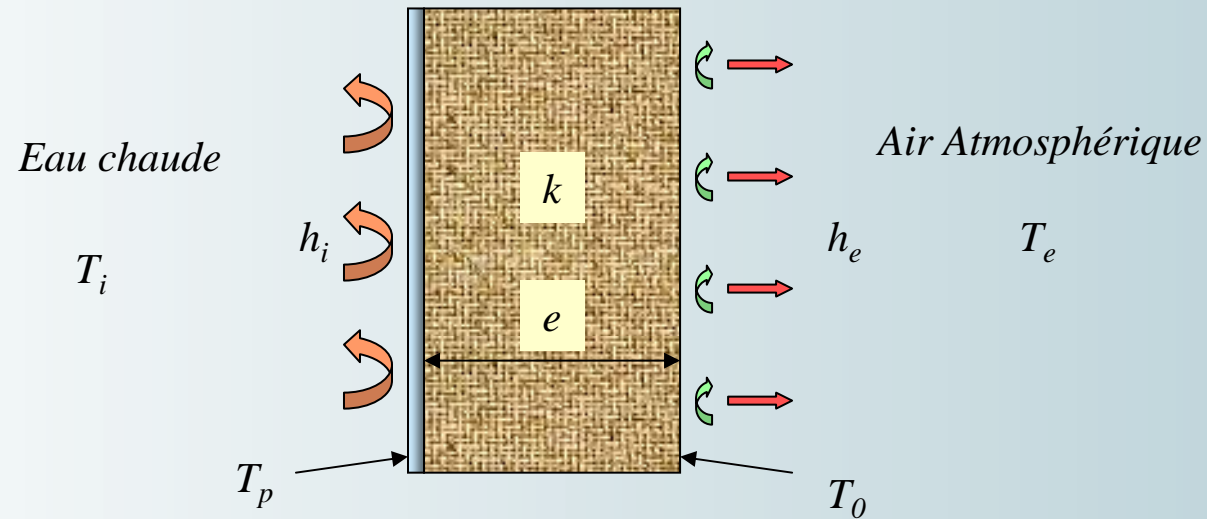
$$V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = PV + \sum_{\text{faces}} k \nabla T \cdot \Delta \vec{S}$$



5.5 Cas d'étude : Épaisseur optimale d'isolation thermique



Exemple : Isolation thermique d'une chaudière



Définitions :

- ⇒ e Épaisseur d'isolation
- ⇒ k Conductivité de l'isolant
- ⇒ h_i, h_e Coefficients de transfert par convection (+ rayonnement)
- ⇒ $\Delta T = T_i - T_e$ Différence de température
- ⇒ T_p Température de paroi intérieure
- ⇒ T_0 Température de paroi extérieure

- Flux de chaleur sans isolation en W/m²

$$q_0 = \frac{\Delta T}{R_{total,sans}}$$

Résistance thermique totale :

$$R_{total} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_{metal}}{k_{metal}} + \frac{1}{h_e}$$

Hypothèses : $1/h_i \ll 1/h_e$

$$e_{metal}/k_{metal} \ll 1/h_e \Rightarrow T_p = T_i$$

$$q_0 = h_e (T_p) \Delta T$$

- Flux de chaleur avec isolation en W/m²

$$q = \frac{\Delta T}{R_{total,isolé}}$$

avec

$$R_{total,isolé} = \frac{e}{k} + \frac{1}{h_e (T_0)}$$

- Économie de puissance thermique en W/m²

$$\Delta q = \left(h_e (T_p) - \frac{1}{\frac{e}{k} + \frac{1}{h_e (T_0)}} \right) \Delta T$$

- Économie annuelle en énergie primaire en kWh/m²/an

$$\Delta E = \frac{U \Delta q \cdot 10^{-3}}{\eta}$$

U : nombre d'heures d'utilisation par an

η : rendement de transformation énergie primaire \Rightarrow énergie thermique

- Économie annuelle en €/an

$$AS = \pi_f \Delta E$$

π_f : prix du combustible en €/kWh

- Prix de l'isolation

$$C = C_0 + C_p e$$

- Remboursement annuel de l'isolation

$$c = \alpha C$$

avec

$$\alpha = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^{n+1} - 1}$$

i : taux d'intérêt annuel

n : durée de remboursement en années \Rightarrow durée de vie



- Économie nette annuelle en €/an

$$ANS = AS - \alpha C = K \left(h_e(T_p) - \frac{1}{\frac{e}{k} + \frac{1}{h_e(T_0)}} \right) - \alpha(C_0 - C_p e) \quad \text{avec} \quad K = \frac{\pi_f U \Delta T \cdot 10^{-3}}{\eta}$$

- Épaisseur optimale de l'isolant

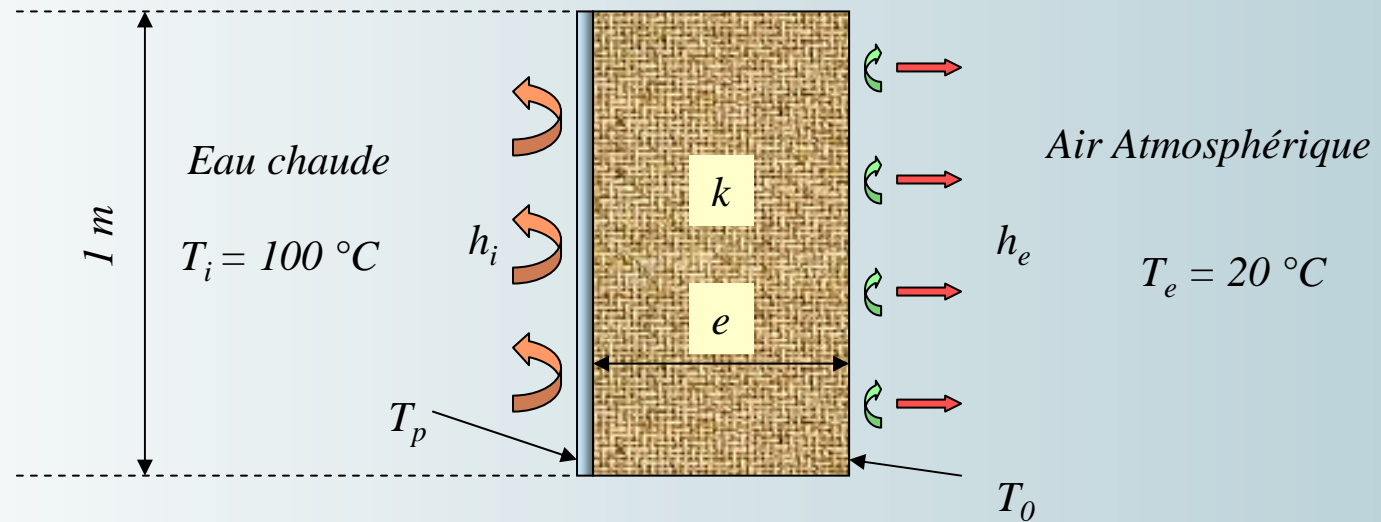
$$\frac{d(ANS)}{de} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{\text{optimum}} = k \left(\sqrt{\frac{K}{\alpha k C_p}} - \frac{1}{h_e(T_0)} \right)$$

- Conclusions :

- \Rightarrow Conductivité du matériau isolant (k)
- \Rightarrow Utilisation annuelle de l'installation (U)
- \Rightarrow Prix du combustible (π_f)
- \Rightarrow Rendement chaudière (η)
- \Rightarrow Annuité $\alpha = f(i, n)$
- \Rightarrow Le terme C_p du prix de l'isolant
- \Rightarrow Coefficient de convection (h_e)
- \Rightarrow Différence de température (ΔT)

Analyse de
sensibilité

Exemple chiffré



• Évaluation du coefficient de convection h_e

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

(1) Chapman

$$Nu = 0.129 (Gr Pr)^{1/3}$$

(2) Jacob

$$Nu = 0.555 (Gr Pr)^{1/4}$$

(3) Corrélation simplifiée

$$h_e = 2 (\Delta T)^{1/3}$$

pour $Gr \triangleq \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} \geq 10^9$

- Coefficient de convection h_e

Grandeur	Symbole	Unité	$T_p=40\text{ °C}$	$T_p=100\text{ °C}$
Température moyenne	Tm	°C	30	60
Coefficient d'expansion	Beta	1/°C	0.00330	0.00300
Masse volumique	Rho	kg/m ³	1.164	1.059
Différence de température	DT	°C	20	80
Viscosité dynamique	Mu	Ns/m ²	1.85E-05	2.00E-05
Nombre de Prandlt	Pr	-	1	1
Nombre de Raile	Ra=GrPr	-	2.563E+09	6.609E+09
Conductivité de l'air	k	W/mK	0.027	0.03

Coefficient h_e (W/m ² /K)	$T_p=40\text{ °C}$	$T_p=100\text{ °C}$
Chapman	4.767	7.263
Jacob	3.372	4.747
Simplifiée	5.429	8.618
Moyenne	4.522	6.876

- Flux sans isolation en W/m² : $T_0 = 100\text{ °C}$

$$q_{conv,0} = 6.876 \cdot 80 = 550$$

$$q_{ray,0} = \sigma \varepsilon (T_0^4 - T_e^4) = 640$$

$$h_e (T_0 = 100\text{ °C}) = 1190 / 80 \cong 15 \frac{W}{m^2 K}$$

- Flux avec isolation en W/m² : $T_0 = 40\text{ °C}$

$$q_{conv,0} = 4.522 \cdot 20 = 90.5$$

$$q_{ray,0} = \sigma \varepsilon (T_0^4 - T_e^4) = 12$$

$$h_e (T_0 = 40\text{ °C}) = 112 / 20 \cong 5.60 \frac{W}{m^2 K}$$

Exemple chiffré : Analyse de sensibilité

Données de base

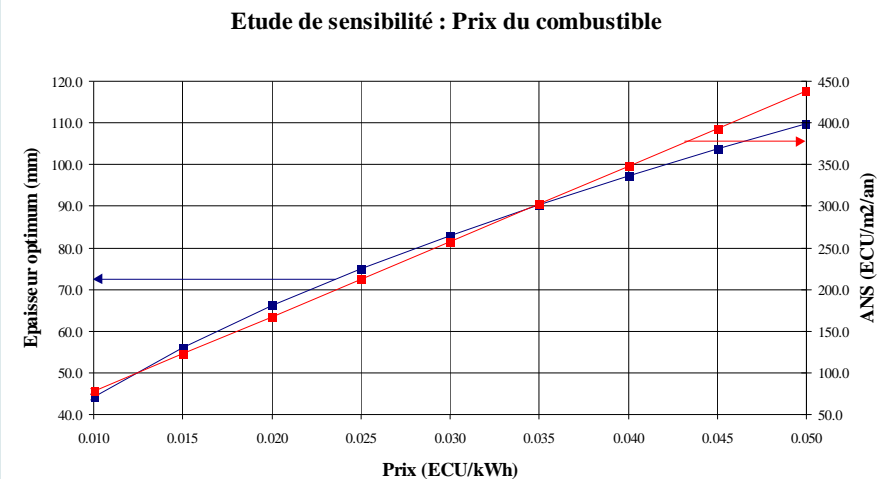
$$\begin{aligned} k &= 0.05 \text{ W/m/K} \\ U &= 5000 \text{ h/an} \\ \pi_f &= 0.02 \text{ €/kWh} \\ \eta &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_o &= 50 \text{ €/m}^2 \\ C_p &= 1200 \text{ €/m}^3 \\ i &= 0.08 \\ n &= 20 \text{ ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= 80 \text{ °C} \\ h_e(100 \text{ °C}) &= 15 \text{ W/m}^2\text{K} \\ h_e(40 \text{ °C}) &= 5.6 \text{ W/m}^2\text{K} \end{aligned}$$

Sensibilité au prix du combustible

<i>Prix comb.</i>	<i>e optimum</i>	<i>C</i>	<i>ANS</i>
<i>ECU/kWh</i>	<i>mm</i>	<i>ECU/m2</i>	<i>ECU/an/m2</i>
0.01	44.1	103.0	78.3
0.015	56.1	117.3	122.6
0.02	66.1	129.4	167.2
0.025	75.0	140.0	212.1
0.03	83.0	149.6	257.2
0.035	90.4	158.4	302.5
0.04	97.2	166.7	347.8
0.045	103.7	174.4	393.3
0.05	109.8	181.7	438.8

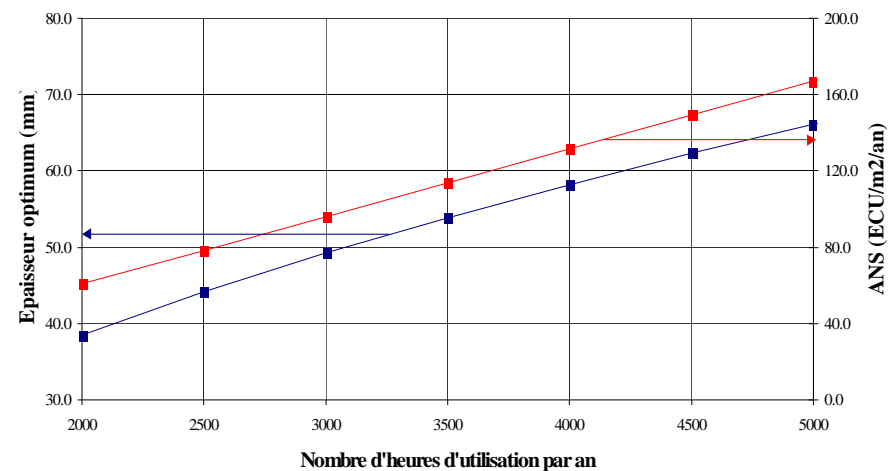




Sensibilité à l'utilisation

<i>U</i>	<i>e optimum</i>	<i>C</i>	<i>ANS</i>
heures/an	mm	ECU/m ²	ECU/an/m ²
2000	38.5	96.3	60.8
2500	44.1	103.0	78.3
3000	49.2	109.1	96.0
3500	53.9	114.6	113.7
4000	58.2	119.9	131.5
4500	62.3	124.7	149.3
5000	66.1	129.4	167.2
5500	69.8	133.8	185.2
6000	73.3	138.0	203.1

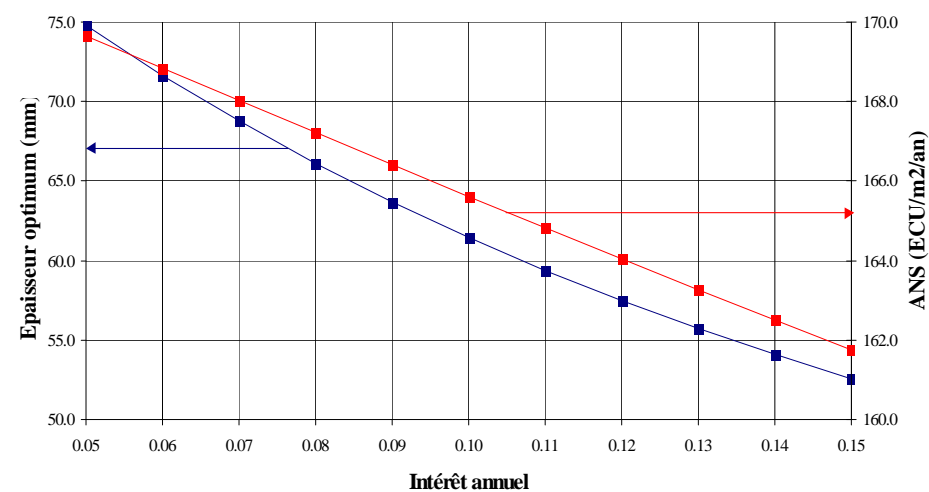
Etude de sensibilité : Utilisation



Sensibilité au taux d'intérêt

<i>Intérêt</i>	<i>e optimum</i>	<i>C</i>	<i>ANS</i>
-	mm	ECU/m ²	ECU/an/m ²
0.05	74.8	139.8	169.7
0.06	71.7	136.0	168.8
0.07	68.8	132.5	168.0
0.08	66.1	129.4	167.2
0.09	63.7	126.4	166.4
0.1	61.5	123.8	165.6
0.11	59.4	121.3	164.8
0.12	57.5	119.0	164.0
0.13	55.7	116.9	163.3
0.14	54.1	114.9	162.5
0.15	52.6	113.1	161.8

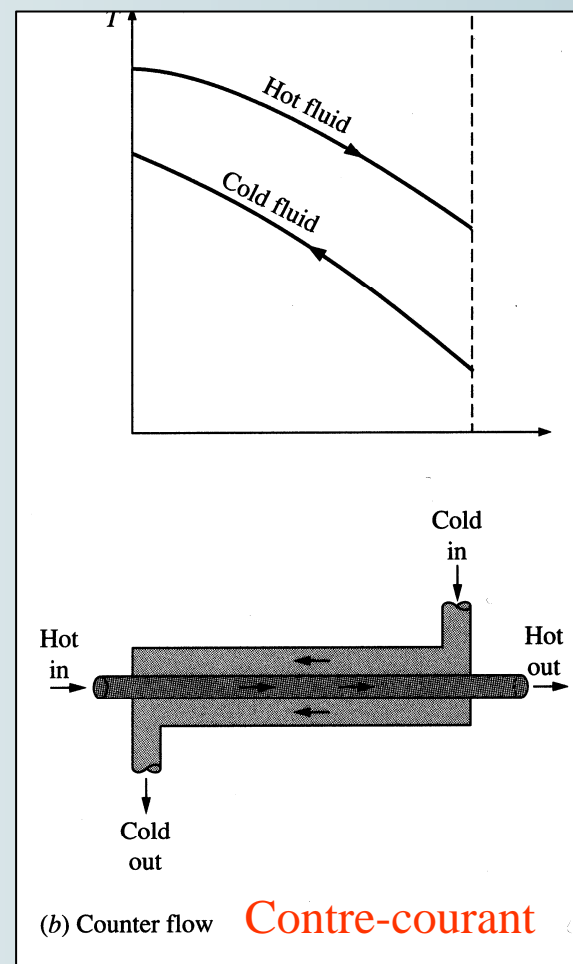
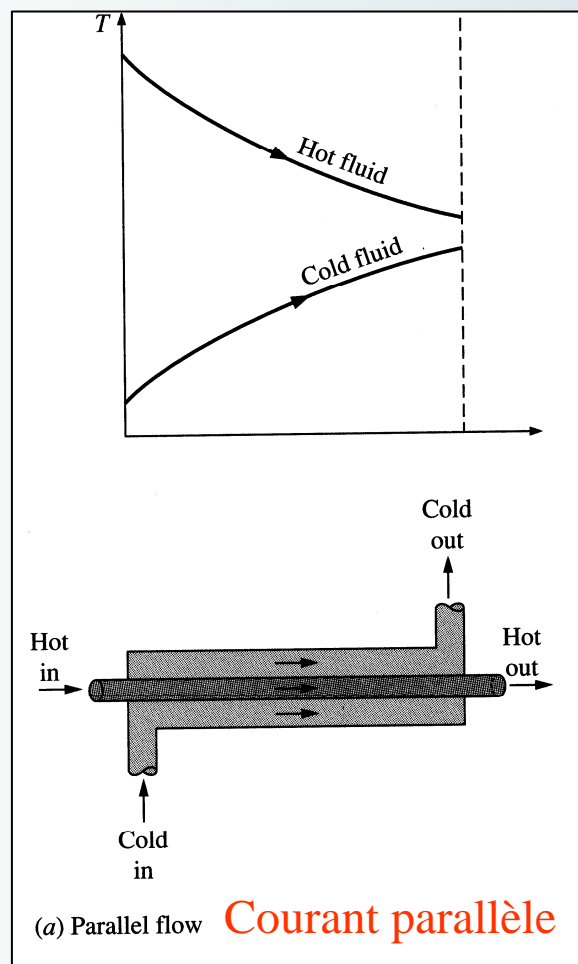
Etude de sensibilité : Intérêt



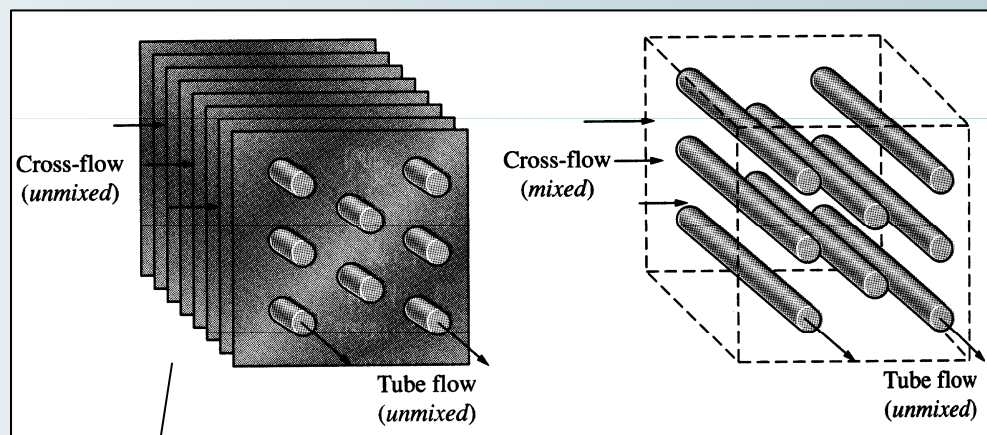
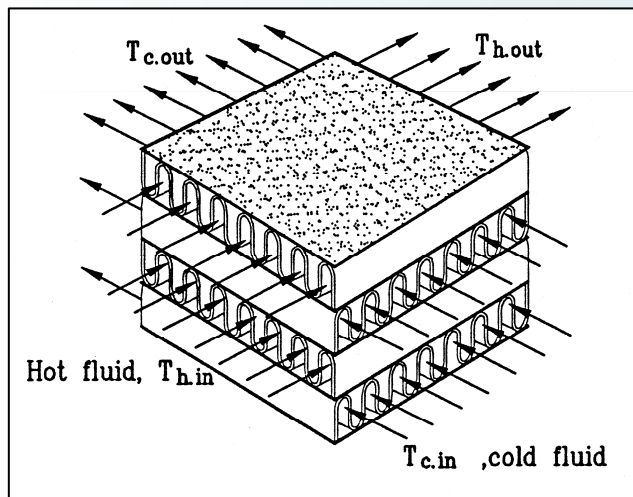


5.5 Les échangeurs de chaleur

Type d'échangeurs de chaleur

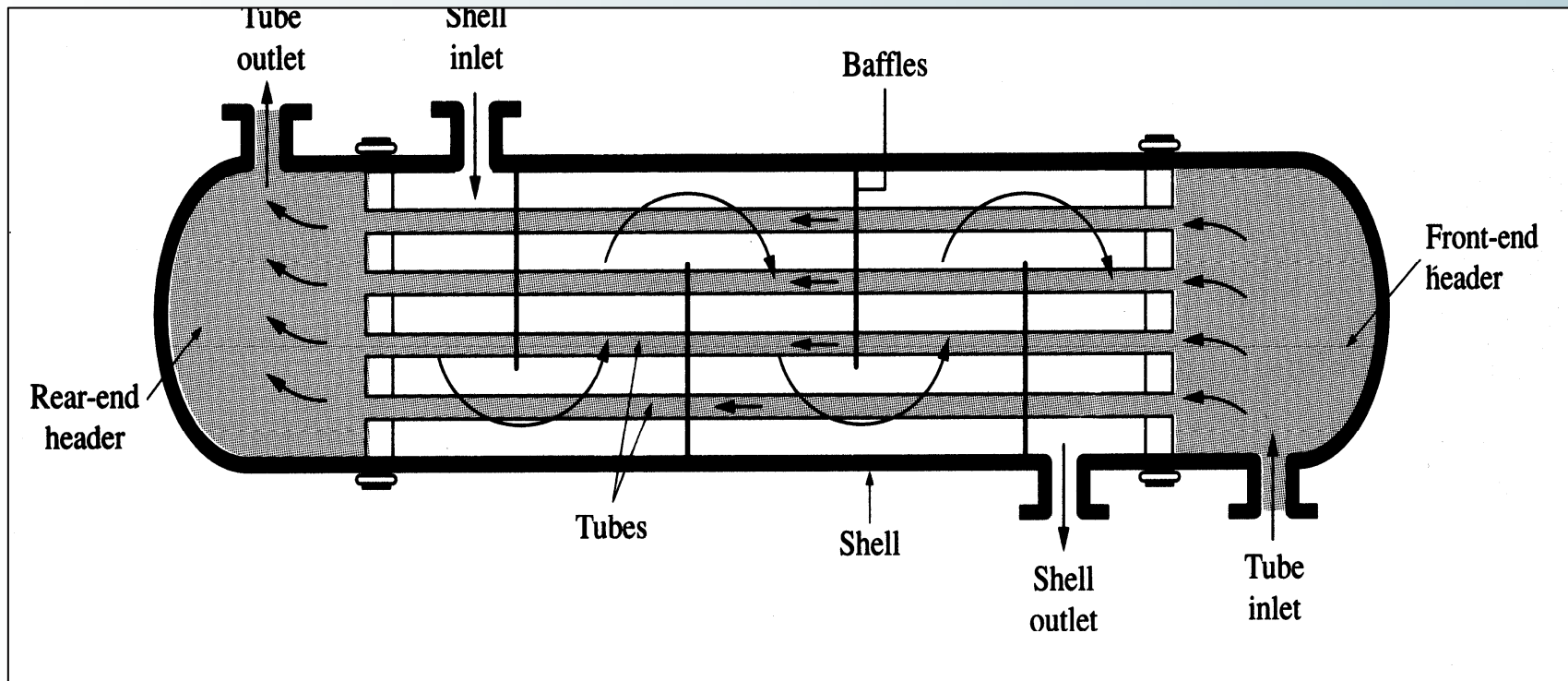


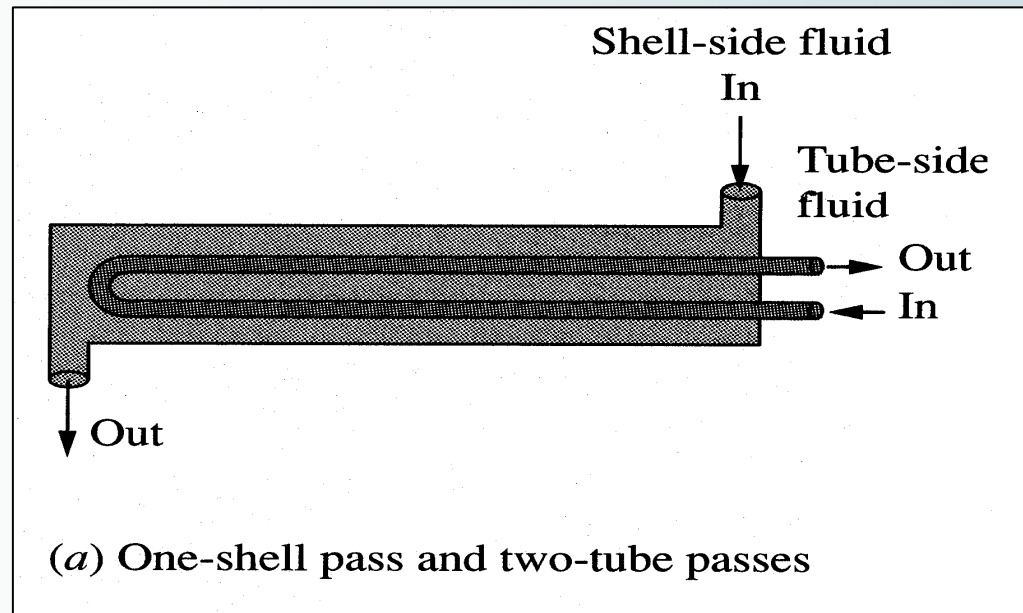
Courants croisés



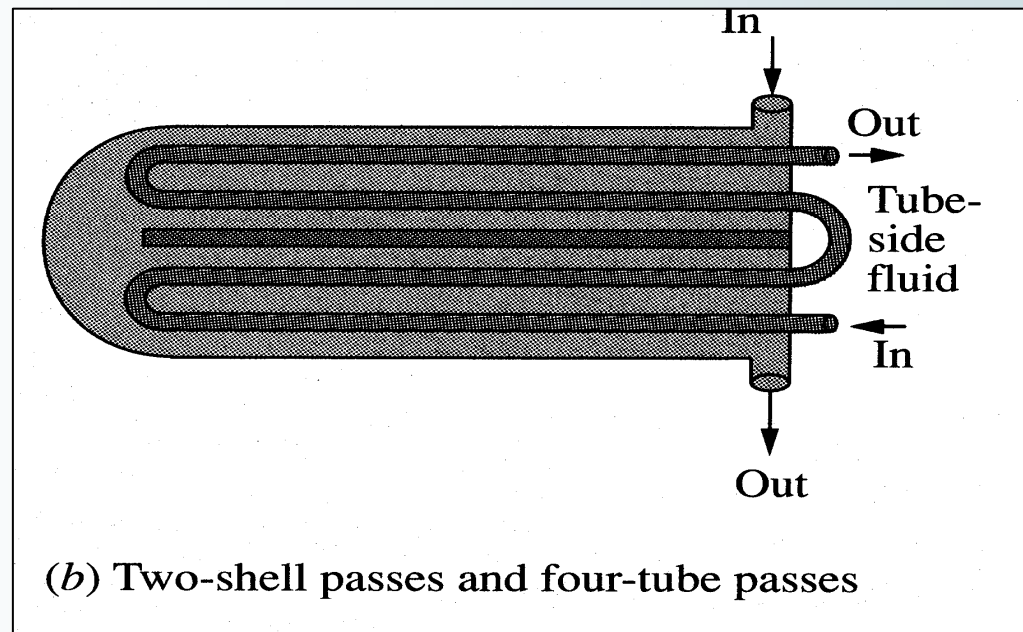


Échangeurs tubulaires





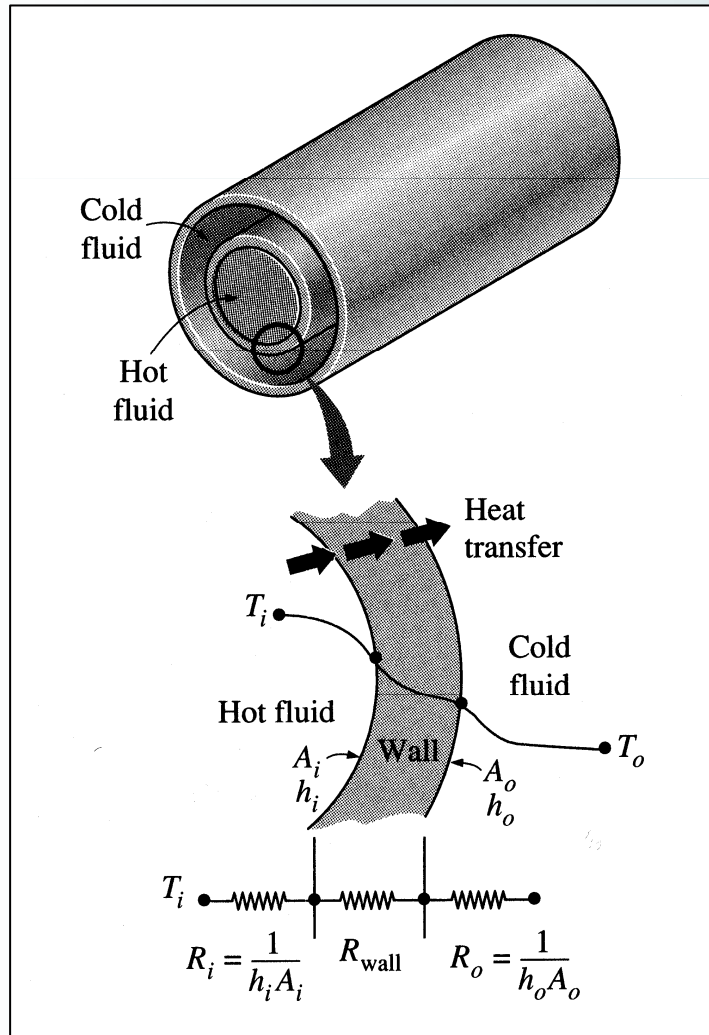
Échangeur
« épingle »



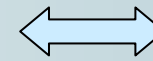
Échangeur
« double - épingle »



Coefficient de transfert global - Résistances thermiques



$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = \Delta T = R_{th} \dot{Q}_l$$



$$U = RI$$

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = R_i + R_{wall} + R_o$$

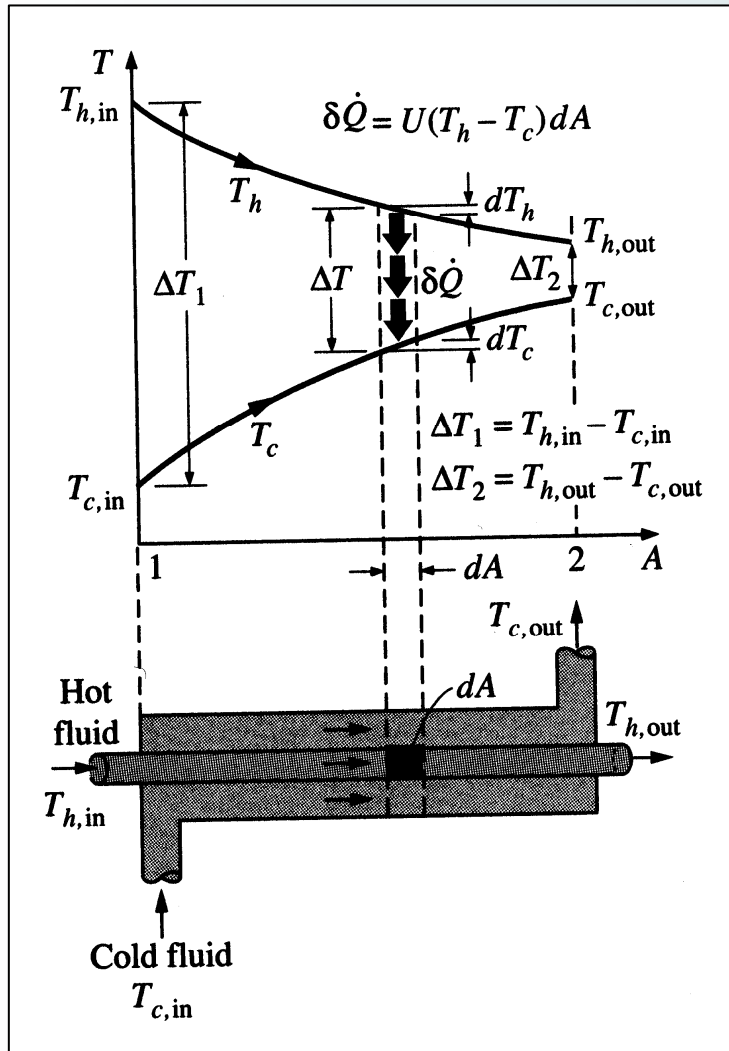
$$R_i = \frac{1}{A_i h_i}$$

$$R_{wall} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi kL}$$

$$R_o = \frac{1}{A_o h_o}$$

Type of heat exchanger	$U, \text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}^*$
Water-to-water	850–1700
Water-to-oil	100–350
Water-to-gasoline or kerosene	300–1000
Feedwater heaters	1000–8500
Steam-to-light fuel oil	200–400
Steam-to-heavy fuel oil	50–200
Steam condenser	1000–6000
Freon condenser (water cooled)	300–1000
Ammonia condenser (water cooled)	800–1400
Alcohol condensers (water cooled)	250–700
Gas-to-gas	10–40
Water-to-air in finned tubes (water in tubes)	30–60 [†]
Steam-to-air in finned tubes (steam in tubes)	400–850 [†]
	30–300 [†]
	400–4000 [‡]

Analyse thermique des échangeurs de chaleur - Méthode « *LMTD* »



- Bilan thermique global sur les fluides

$$\dot{Q} = m_h c_{ph} (T_{h,in} - T_{h,out})$$

$$\dot{Q} = m_c c_{pc} (T_{c,out} - T_{c,in})$$

- Bilan thermique sur un élément dA

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_h c_{ph} dT_h = \dot{m}_c c_{pc} dT_c = U (T_h - T_c) dA$$



Méthode « *LMTD* » : différence de température moyenne logarithmique

- Bilan thermique sur un élément dA $d\dot{Q} = -\dot{m}_h c_{ph} dT_h = \dot{m}_c c_{pc} dT_c = U(T_h - T_c) dA$

- On obtient :
$$d\dot{Q} = -\frac{dT_h}{\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}}} = \frac{dT_c}{\frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}}} = -\frac{d(T_h - T_c)}{\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}}} = U(T_h - T_c) dA$$

- Après intégration :

$$\ln \frac{T_{h,out} - T_{c,out}}{T_{h,in} - T_{c,in}} = -UA \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} \right) = -UA \left(\frac{T_{h,in} - T_{h,out}}{\dot{Q}} + \frac{T_{c,out} - T_{c,in}}{\dot{Q}} \right)$$

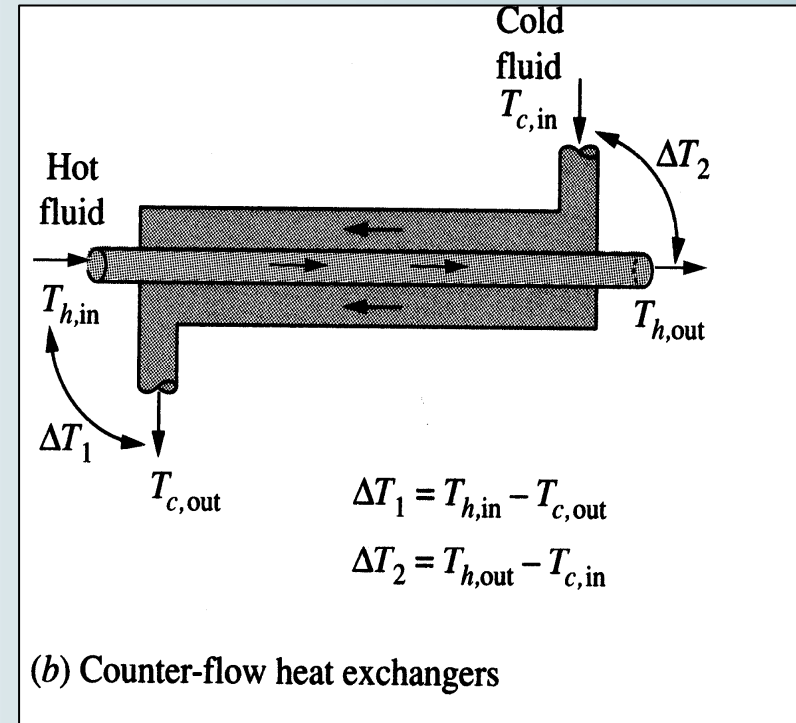
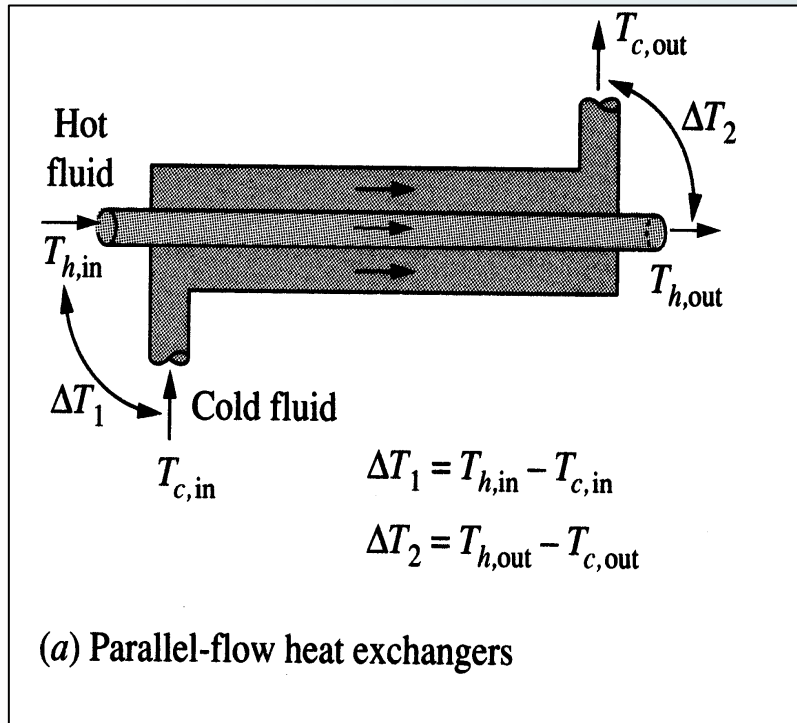
- Formule d'Hausbrand

$$\dot{Q} = (AU) \Delta T_{\ln} = \frac{\Delta T_{\ln}}{R_{th}}$$

avec

$$\Delta T_{\ln} \triangleq \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \Delta T_1 - \ln \Delta T_2}$$

Choix de ΔT_1 et ΔT_2



Particularités

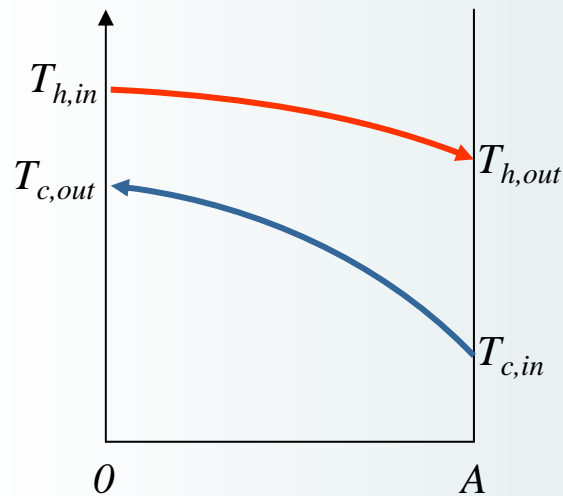
Echangeurs à contre-courant

• Définition :

$$C_h \triangleq \dot{m}_h c_{ph}$$

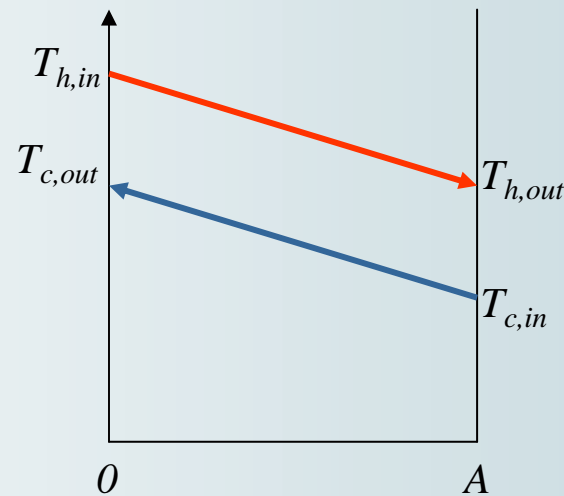
$$C_c \triangleq \dot{m}_c c_{pc}$$

$$C \triangleq \frac{\min(C_h, C_c)}{\max(C_h, C_c)}$$

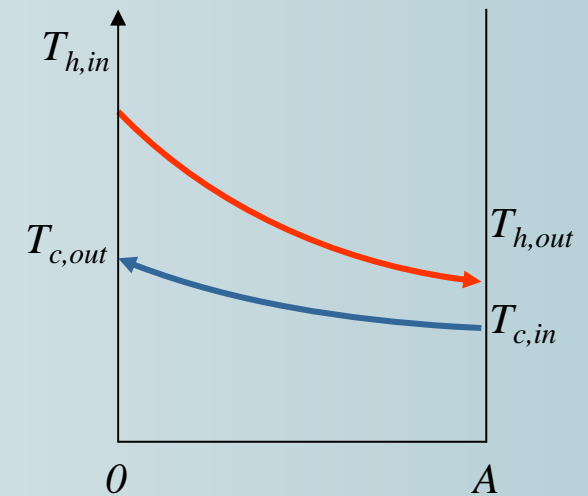


$$C_h > C_c \quad C < 1$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} T_{c,out} = T_{h,in}$$



$$C_h = C_c \quad C = 1$$

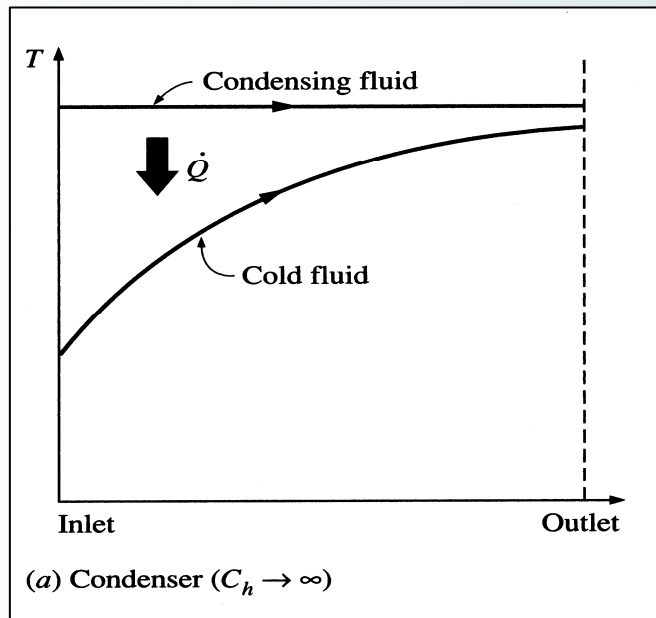


$$C_h < C_c \quad C < 1$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} T_{c,in} = T_{h,out}$$

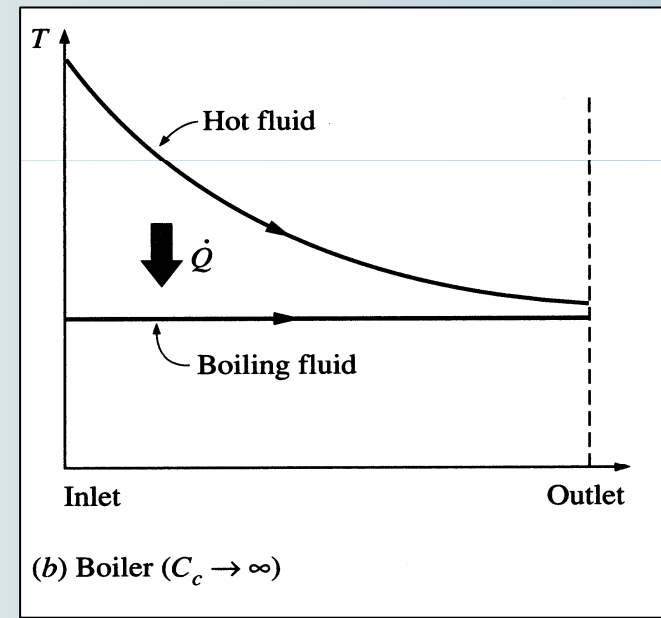
$$\dot{Q}_{\max} = \min(C_h, C_c)(T_{h,in} - T_{c,in})$$

Condenseurs - évaporateurs



$$C_h \rightarrow \infty$$

$$C = 0$$



$$C_c \rightarrow \infty$$

$$C = 0$$

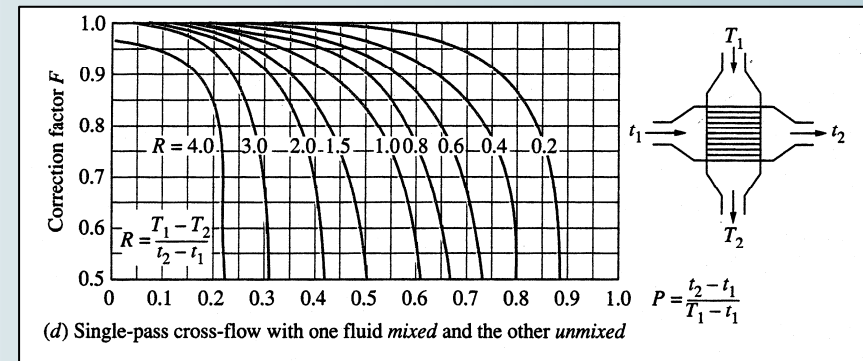
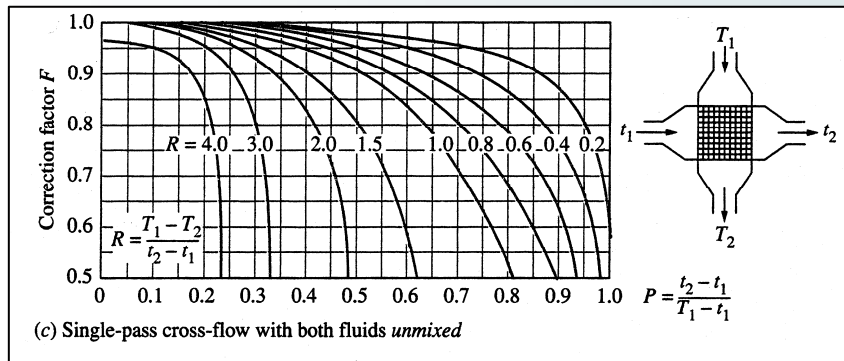
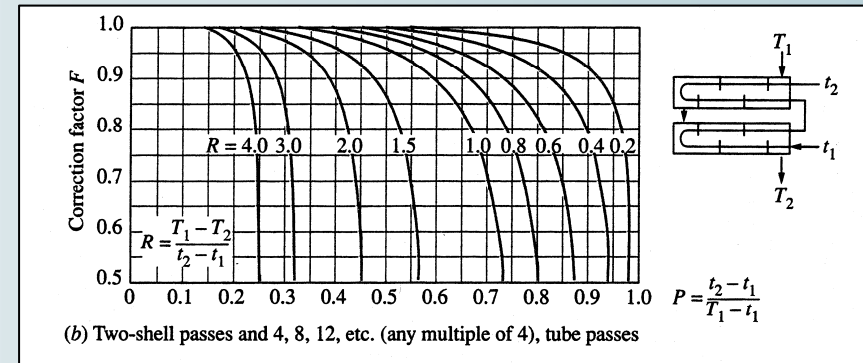
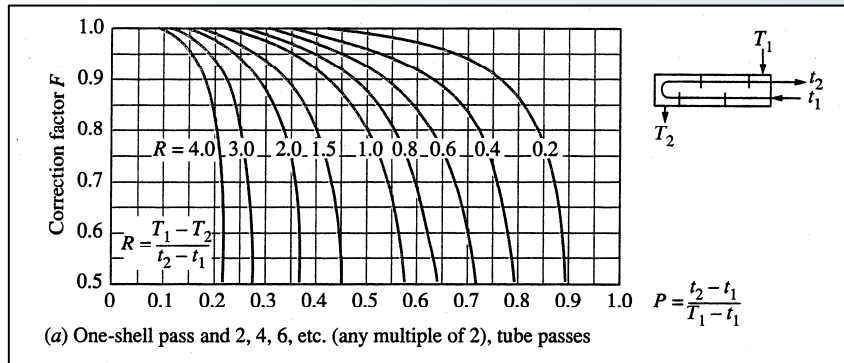


Utilisation pratique de la formule d'Hausbrand

$$\dot{Q} = F(AU)\Delta T_{\ln} = F \frac{\Delta T_{\ln}}{R_{th}}$$

avec

$$\Delta T_{\ln} \triangleq \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \Delta T_1 - \ln \Delta T_2}$$



Analyse thermique des échangeurs de chaleur - Méthode « ε - NTU »

Définition de l'efficacité des échangeurs de chaleur

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}}$$

- Echangeur idéal : contre-courant de surface d'échange A infinie

$$\dot{Q}_{\max} = \min(C_h, C_c)(T_{h,in} - T_{c,in})$$

- La connaissance de l'efficacité permet de déterminer la puissance échangée

$$\dot{Q} = \varepsilon \min(C_h, C_c)(T_{h,in} - T_{c,in})$$

Nombres adimensionnels des échangeurs de chaleur

- Nombre d'unités de transfert

$$NTU \triangleq \frac{(AU)}{\min(C_h, C_c)}$$

- Rapport de capacité thermique

$$C \triangleq \frac{\min(C_h, C_c)}{\max(C_h, C_c)}$$

- Efficacité

$$\varepsilon \triangleq \frac{\dot{Q}}{\min(C_h, C_c)(T_{h,in} - T_{c,in})}$$

⇒ Analyse thermique des échangeurs

$$\varepsilon = f(NTU, C)$$

ou

$$NTU = f(\varepsilon, C)$$



Relations ε -NTU

Effectiveness relations for heat exchangers: $NTU = UA/C_{\min}$

and $C = C_{\min}/C_{\max} = (\dot{m}C_p)_{\min}/(\dot{m}C_p)_{\max}$

**Heat exchanger
type**

Effectiveness relation

1 *Double pipe:*

Parallel-flow $\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + C)]}{1 + C}$

Counter-flow $\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C)]}{1 - C \exp[-NTU(1 - C)]}$

2 *Shell and tube:*

One-shell pass

2, 4, ... tube
passes

$$\varepsilon = 2 \left\{ 1 + C + \sqrt{1 + C^2} \frac{1 + \exp[-NTU\sqrt{1 + C^2}]}{1 - C \exp[-NTU\sqrt{1 + C^2}]} \right\}^{-1}$$

3 *Cross-flow*

(*single-pass*)

Both fluids
unmixed

$$\varepsilon = 1 - \exp \left\{ \frac{NTU^{0.22}}{C} [\exp(-CNTU^{0.78}) - 1] \right\}$$

C_{\max} mixed,
 C_{\min} unmixed

$$\varepsilon = \frac{1}{C} (1 - \exp\{1 - C[1 - \exp(-NTU)]\})$$

C_{\min} mixed,
 C_{\max} unmixed

$$\varepsilon = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{C} [1 - \exp(-CNTU)] \right\}$$

4 *All heat*

exchangers

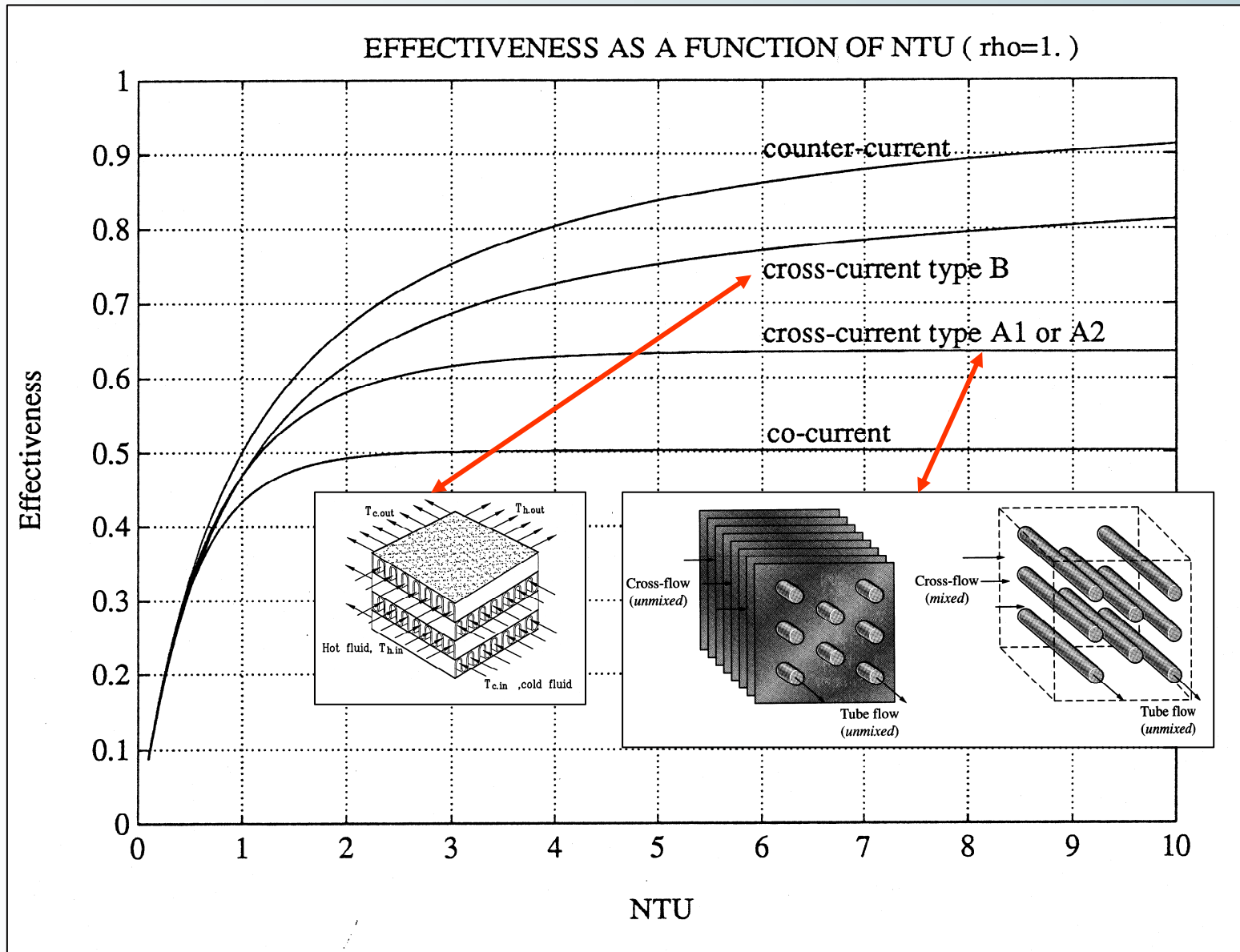
with $C = 0$

$$\varepsilon = 1 - \exp(-NTU)$$

Source: Kays and London, Ref. 7.

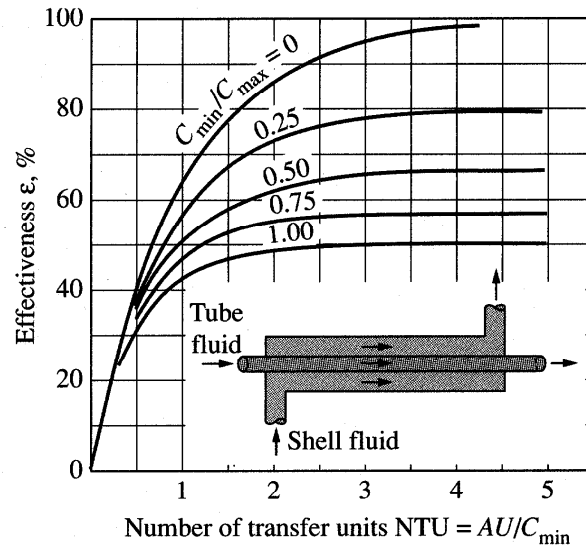


Relations ε -NTU

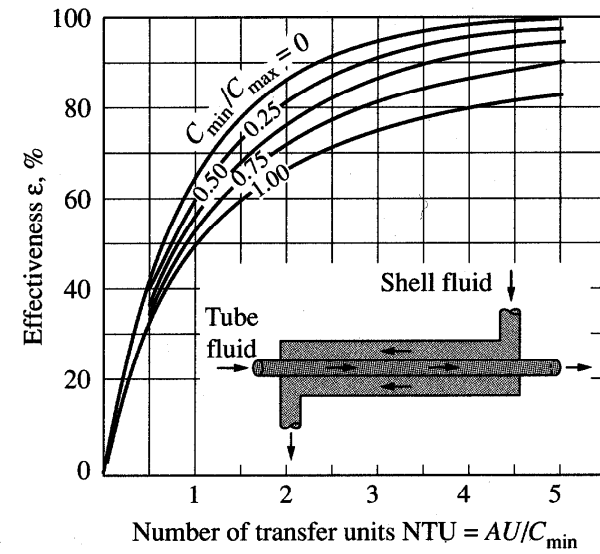




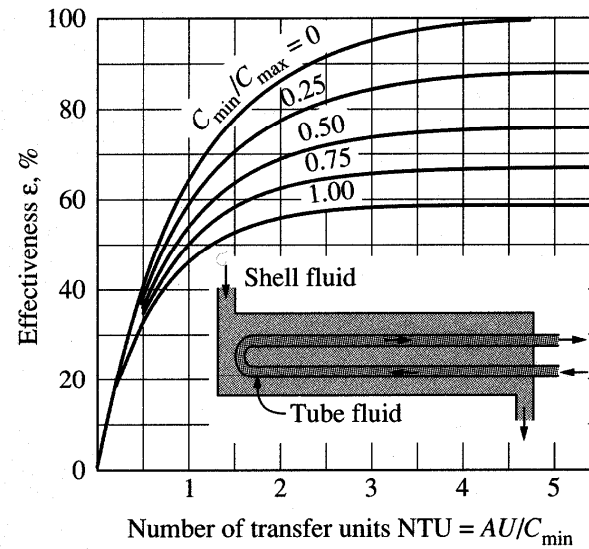
Effectiveness for heat exchangers (from Kays and London, Ref. 7).



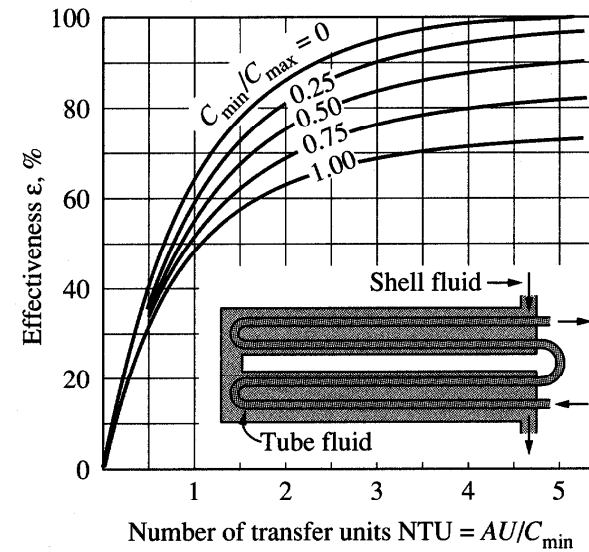
(a) Parallel-flow



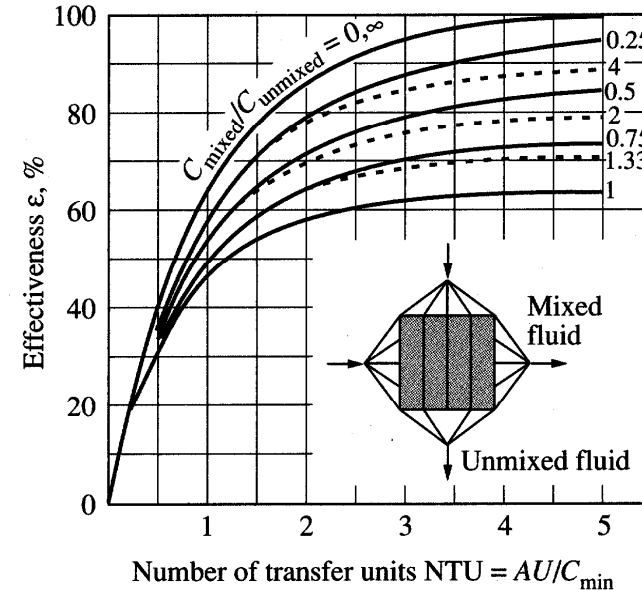
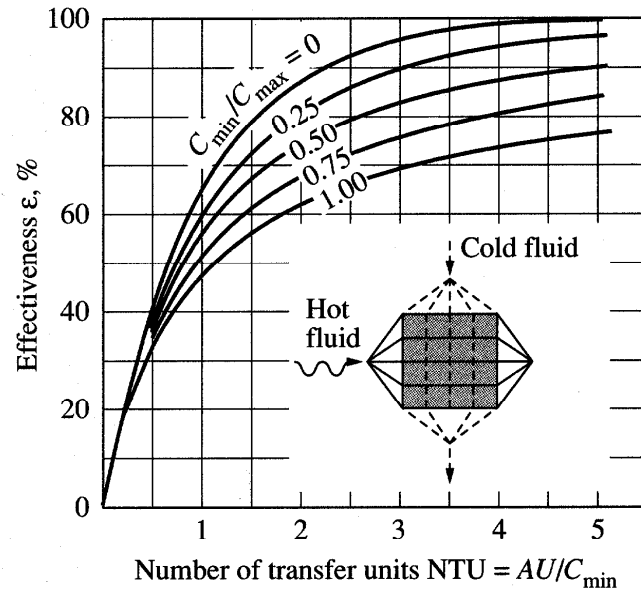
(b) Counter-flow



(c) One-shell pass and 2, 4, 6, tube passes



(d) Two-shell passes and 4, 8, 12, tube passes



⇒ Conséquences :

- Pour tout type d'échangeur, l'efficacité augmente lorsque le rapport de capacité diminue.
- L'efficacité est la plus grande et ne dépend pas du type d'échangeur lorsque le rapport de capacité vaut zéro.
- Mieux vaut organiser l'écoulement des fluides de façon « non mélangée ».



Problème d'échangeur de chaleur : le « sizing » et le « rating »

Variables connues :

• Fluide chauffant :

C_h

$T_{h,in}$

Sizing :

\dot{Q}

→

ϵ

• Fluide chauffé :

C_c

$T_{c,in}$

Rating :

AU

→

NTU

Variables inconnues : 3

$T_{h,out}$

Sizing :

AU

$T_{c,out}$

Rating :

\dot{Q}

Relations : 3

• Bilans thermiques

$$\dot{Q} = m_h c_{ph} (T_{h,in} - T_{h,out})$$

$$\dot{Q} = m_c c_{ch} (T_{c,out} - T_{c,in})$$

• Méthodes

⇒ ~~LMTD~~ :

$$\dot{Q} = F(AU) \Delta T_{ln} \rightarrow \text{ITERATIONS ?}$$

⇒ ϵ - NTU :

Sizing :

$$NTU = f(\epsilon, C)$$

Rating :

$$\epsilon = f(NTU, C)$$



Echangeur de chaleur : compromis « Perte de charge - Echange thermique »

Choix dimensionnel : section droite de passage du fluide

$$V \doteq \frac{1}{D_h^2}$$

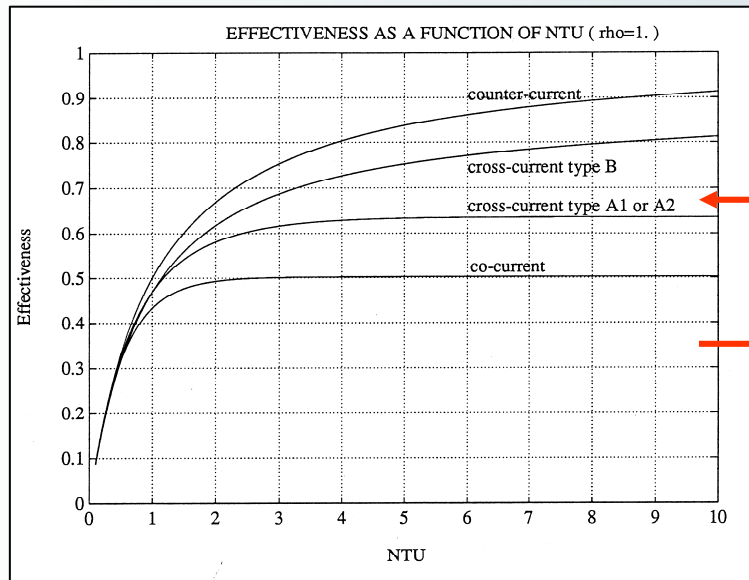
⇒ Point de vue « utilisation » : perte de charge

$$P_f \doteq \frac{1}{D_h^5} \doteq V^{2.5}$$

⇒ Point de vue échange thermique :

$$R_{th} = \frac{1}{(AU)} = R_i + R_{wall} + R_o$$

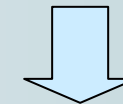
$$R_o = \frac{1}{A_o h_o}$$



Soit R_o prépondérant :

$$NTU \doteq (AU) \doteq h_o \doteq Re^{0.8} \doteq V^{0.8}$$

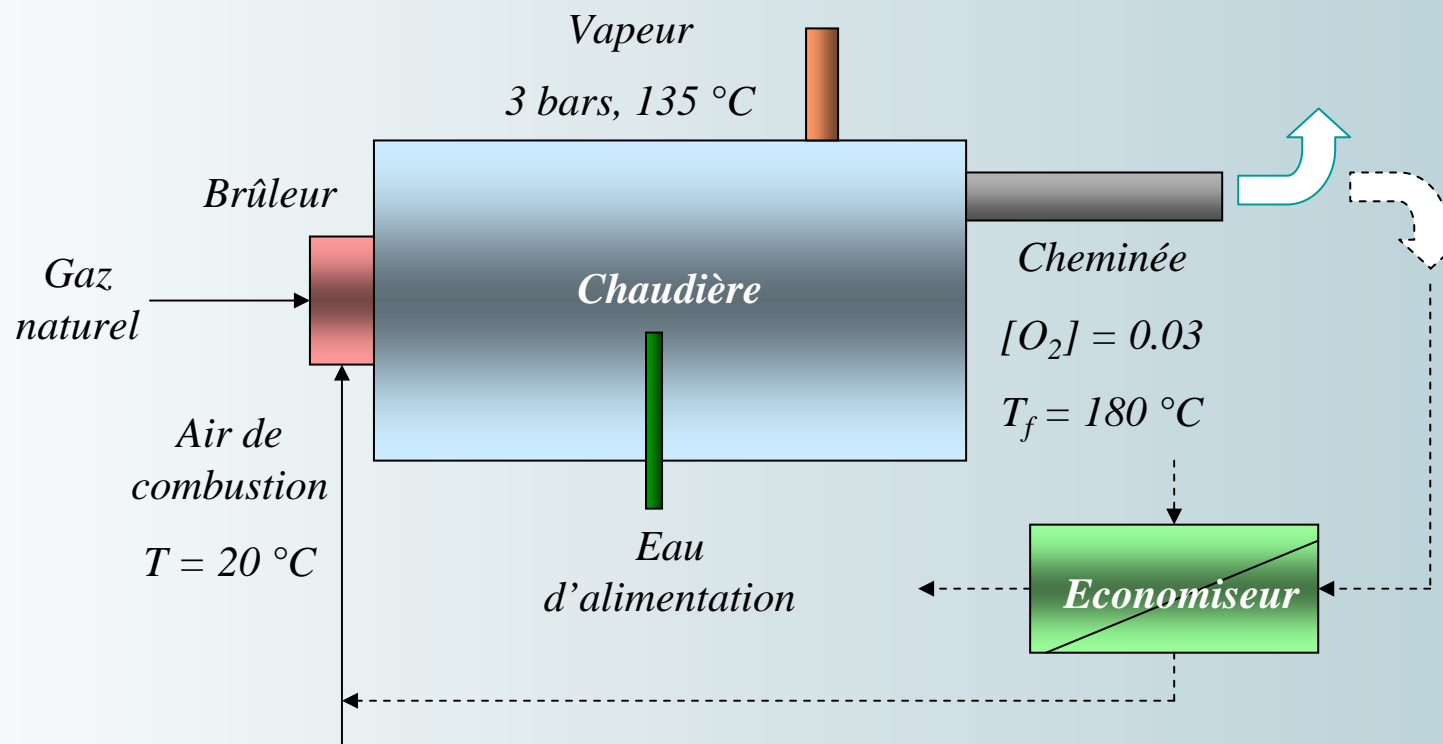
Influence sur ε et sur \dot{Q}



Compromis

$$P_f \Leftrightarrow \dot{Q}$$

Cas d'étude : Économiseur d'une chaudière



• Caractéristiques chaudière

Puissance thermique : 10 MW

Utilisation : 4000 h/an

Prix du combustible : 0.25 €/m^3_N

• Caractéristiques économiseur

(AU) : 0.7 kW/K

Courant croisé « fluides non mélangés »

Durée de vie : 10 ans

Coût de l'installation : 30000 €

Entretien : 2000 €

Évaluation des conditions de fonctionnement de la chaudière

Combustible

• *Composition* : $[CH_4] = 0.81$ $[C_2H_6] = 0.05$ $[N_2] = 0.11$ $[CO_2] = 0.03$...

• *Pouvoir calorifique* :

$$PCS = 12750[H_2] + 12620[CO] + 39710[CH_4] + 58950[C_2H_4] + 69210[C_2H_6] + \dots$$

$$PCS = 35626 \text{ kJ/m}^3_N$$

• *Débit nominal* :

$$Q_{comb} = \frac{P_{th}}{PCS}$$

$$Q_{comb} = 0.287 \text{ m}^3_N/s$$

• *Consommation annuelle* :

$$C = 0.287 \times 3600 \times 4000 = 4132800 \text{ m}^3_N/an$$

• *Coût annuel combustible* :

$$F_{combustible} = \pi_f C$$

$$F_{combustible} = 1033202 \text{ €/an}$$

Combustion

Avant combustion			Après combustion			
Combustible	1 Nm3	Nm3 O2	Nm3 CO2	Nm3 H2O	Nm3 N2	Nm3 O2
[CH4]	0.81	1.620	0.810	1.620	-	-
[C2H6]	0.05	0.175	0.100	0.150	-	-
[N2]	0.11	-	-	-	0.110	-
[CO2]	0.03	-	0.030	-	-	-
Air	-	-	-	-	6.749	-
Stoechiométrie	1	1.795	0.940	1.770	6.859	-
Pratique		1.795λ	0.940	1.770	6.75λ+0.11	1.795(λ-1)

• Excès d'air : $[O_2]' = \frac{1.795(\lambda-1)}{6.75\lambda+1.05} = 0.03$

$\lambda = 1.147$

• Pouvoir comburivore : $V_{a,\lambda} = \frac{1.795\lambda}{0.21}$

$V_{a,\lambda} = 9.804 \text{ m}^3_N \text{ d'air} / \text{m}^3_N \text{ de gaz}$

• Pouvoir fumigène : $V_{f,\lambda} = 0.940 + 1.770 + (6.75\lambda + 0.11) + 1.795(\lambda - 1)$

$V_{f,\lambda} = 10.826 \text{ m}^3_N \text{ d'air} / \text{m}^3_N \text{ de gaz}$

• Débit d'air : $Q_{air} = Q_{comb} V_{a,\lambda}$

$Q_{air} = 2.814 \text{ m}^3_N/\text{s} = 3.638 \text{ kg/s}$

• Débit de fumée : $Q_{fumée} = Q_{comb} V_{f,\lambda}$

$Q_{fumée} = 3.107 \text{ m}^3_N/\text{s} = 4.017 \text{ kg/s}$

Évaluation des performances de l'économiseur

Méthode ε -NTU

• Caractéristiques de fonctionnement

- Capacité thermique côté air :

$$C_{air} = Q_{air} c_p$$

$$C_{air} = 3.656 \text{ kW/K}$$

- Capacité thermique côté fumée :

$$C_{fumée} = Q_{fumée} c_p$$

$$C_{fumée} = 4.037 \text{ kW/K}$$

- Rapport des capacités :

$$C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$$

$$C = 0.906$$

• Performances thermiques

- Nombre d'unités de transfert :

$$NTU = \frac{kS_t}{C_{\min}}$$

$$NTU = 0.191$$

- Efficacité de l'économiseur :

$$\varepsilon = 1 - \exp \left\{ \frac{NTU^{0.22}}{C} \left[\exp(-C \cdot NTU^{0.78}) - 1 \right] \right\}$$

$$\varepsilon = 0.155$$

- Puissance thermique :

$$\dot{Q} = \varepsilon C_{\min} (T_{c,e} - T_{f,e})$$

$$P_{th} = 90.7 \text{ kW}$$

- Températures de sortie :

$$T_{f,s} = 157.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{a,s} = 44.8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Évaluation financière du projet

- Évaluation des économies annuelles du projet à l'année 0 :

- Économie en énergie :

$$\Delta E = 3600 \dot{Q}U$$

$$\Delta E = 1306080 \text{ MJ/an}$$

- Économie en gaz naturel :

$$\Delta C_{\text{gaz}} = \frac{\Delta E}{PCS}$$

$$\Delta C_{\text{gaz}} = 36661 \text{ m}^3_N/\text{an}$$

- Économie brute en € :

$$AGS = \Delta C_{\text{gaz}} \pi_f$$

$$AGS = 9165 \text{ €/an}$$

- Économie nette en € :

$$AS = AGS - F_{\text{entretien}}$$

$$AS = 7332 \text{ €/an}$$

- Valeur actualisée des économies = DBEP

- Soit $i = 0.08$ et $n = 10$ ans

$$DBEP = \sum_{j=0}^n \frac{AS_j}{(1+i)^j} = \frac{AS}{\alpha}$$

$$\alpha = 0.129$$

$$DBEP = 56530 \text{ €}$$

- Valeur actualisée nette = VAN (NPV)

$$VAN = DBEP - C = 26530 \text{ €}$$

- Taux de rentabilité interne TRI (ROI)

$$\sum_{j=0}^n \frac{AS_j}{(1+TRI)^j} - C = 0$$

$$TRI = 30 \%$$

- Temps de retour d'investissement PBT

$$\sum_{j=0}^{PBT} \frac{AS_j}{(1+i)^j} - C = 0$$

$$PBT = 3.7 \text{ années}$$

Conclusions

- Bonne rentabilité du projet.
- Analyse du risque :
 - \Rightarrow Tenue à la corrosion de l'économiseur
 - \Rightarrow Maintenance de l'économiseur (Fouling effect)
 - \Rightarrow Dégradation des performances thermiques
- Contrat de maintenance - Garantie.
- Protocole de réception provisoire et définitive.
- Influence sur le fonctionnement de la chaudière ?